

CÁLCULO DE LAS SECCIONES ÁUREAS CON VALORES REALES PUROS PARA UNA PIRÁMIDE CUADRANGULAR PERFECTA DE LADO Y APOTEMA IGUALES AL NÚMERO PHI (ϕ) Y SUS RELACIONES CON LA FÍSICA CUÁNTICA

CALCULATION OF THE AURA SECTIONS WITH PURE REAL VALUES FOR A PERFECT QUADRANGLE PYRAMID OF SIDE AND APOTEMA EQUAL TO PHI NUMBER (ϕ) AND ITS RELATIONSHIPS WITH QUANTUM PHYSICS

Mario Figueroa Cárdenas¹
Pedro Ángel López Monroy²
Gabriela Cochran Tapia³
Ezequiel García Rodríguez⁴
Juan Antonio Chávez Vega⁵
Jesús Pardo Loayza⁶
Enrique Omar Navarro Caballero⁷

RESUMEN

Con el objetivo de diseñar una pirámide cuadrangular de base y apotema iguales al Número Áureo (ϕ), se calcularon las Secciones Áureas para relacionarlas con las Constantes Físicas Universales y sus vínculos con la Física Cuántica. Existe poca información que expongan las propiedades de los prismas en relación al efecto fotoeléctrico. Se realizó una compilación bibliográfica y revisión audiovisual para analizar los contenidos temáticos.

Artículo recibido el 30 de enero de 2018 y aprobado el 25 de mayo de 2018

- 1 Estudiante del 8º Semestre en la Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). Tutor Universidad Virtual del Estado de Michoacán (UNIVIM). Posdoctorados en el Centro de Investigaciones en Geografía Ambiental (CIGA-UNAM-CONACyT) e Instituto de Investigaciones Agropecuarias y Forestales (IIAF-UMSNH-CONACyT) E-mail: laeamfc@hotmail.com
- 2 Profesor de Asignatura "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: umsnhfclases@gmail.com
- 3 Profesor de Asignatura "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: madrdes10@hotmail.com
- 4 Profesor Investigador Titular "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: ezgarciarod@gmail.com
- 5 Profesor Investigador Titular "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: jacvega57@yahoo.com.mx
- 6 Profesor de Asignatura "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: jpl1980@gmail.com
- 7 Profesor de Asignatura "B" Facultad de Ingeniería Civil (FIC), Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH). E-mail: conc_1603@hotmail.com

Para el diseño geométrico se utilizaron los programas: Autocad (ver. 2017), el editor matemático Daun Equation Editor (ver. 2018) y la calculadora Magic Number 2 (ver. 2018). La pirámide diseñada es geoméricamente armónica y matemáticamente contiene valores puros. Existe una relación que asocia al Número Áureo (Φ) con el Número de Balmer (B), la Constante de la Estructura Fina (α) y la Constante de Rydberg (Rh). Estas relaciones desvelan las propiedades de un prisma de cristal (pirámide) que refracta un rayo de luz para revelar que la luz blanca está compuesta por los colores del arcoíris, perturbación ondulatoria electromagnética que se percibe a través de nuestra vista y que se observa por medio del proceso de dispersión. Los resultados de este trabajo permitirán exponer la analogía geométrica de un prisma en relación a la física cuántica.

Palabras clave: Proporción Áurea, prisma y pirámide, velocidad de la luz, constantes físicas universales.

ABSTRACT

In order to design a quadrangular pyramid of base and apothem equal to the Golden Number (Φ), the Golden Sections were calculated to relate them to the Universal Physical Constants and their links with Quantum Physics. There is few information that exposes the properties of the prisms in relation to the photoelectric effect. A bibliographic compilation and audiovisual review was made to analyze the thematic contents. For the geometric design, the following programs were used: Autocad (ver. 2017), the mathematical editor Daun Equation Editor (ver. 2018) and the Magic Number calculator (ver. 2018). The designed pyramid is geometrically harmonic and mathematically contains pure values. Exists a relationship that associates the Golden Number with the Balmer Number (B), the Fine Structure Constant (α) and the Rydberg Constant (Rh). These relationships reveal the properties of a crystal prism (pyramid) that refracts a ray of light to reveal that white light is composed of the colors of the rainbow, electromagnetic undulatory perturbation that is perceived through our eyes and that is observed through of the dispersion process. The results of this work will allow to expose the geometrical analogy of a prism in relation to quantum physics.

Key words: Golden ratio, prism and pyramid, speed of light, universal physical constants.

Clasificación JEL: C00, C02, C60.

INTRODUCCIÓN

La mathematica è l' alfabeto nel quale DIO ha scritto l' universo.
Galileo Galilei (1564-1642)

Actualmente los poliedros (prismas) representan un importante referente que vincula la geometría general con las matemáticas superiores (álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, trigonometría, cálculo vectorial), la biología (fisiología vegetal y animal), química (estequiometría), física (clásica, relativista y cuántica), arquitectura (proporciones estéticas), ingeniería civil (topografía), artes plásticas (pintura y escultura), medicina reconstructiva, diseño de modas, la música (partituras fractales), el reino mineral y la poesía; disciplinas que motivan e inducen la emoción de creadores, diseñadores y artistas de todos los tiempos para describir la belleza estética universal propia de la naturaleza y su inspiración arquitectónica, modelada por medio de profundas reflexiones humanas que pueden focalizarse y explicarse a través de fundamentos científicos, tecnológicos, cosmológicos, cosmogónicos, religiosos, místicos y teológicos; éstas vinculadas a la física cuántica, las secciones áureas y al número Phi (Φ) conocido como Número de Oro, Proporción Áurea o Divina Proporción.

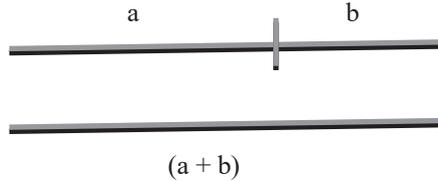
REVISIÓN DE LITERATURA

Antecedentes sobre PHI (Φ) y sus relaciones con las ciencias y las artes.

Probablemente, el número más famoso en el mundo es π , la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, así como el número e base de los logaritmos naturales; pero otro número, conocido desde la antigüedad, parece ser parte de la estructura íntima del Universo. Generalmente se denota por (Φ), quizás en honor del famoso escultor griego Fidias. Es muy interesante encontrar identidades que involucren estos números especiales y, de hecho, se han encontrado muchas expresiones para π y e en términos del número de oro (Φ). Este número se conoce desde la antigüedad y parece que los egipcios pueden haberlo usado en la construcción de las pirámides (Benedetto, E., 2017).

La proporción áurea nace dividiendo en dos un segmento guardando las siguientes proporciones: La longitud del segmento total ($a+b$) es al segmento mayor a , como el segmento mayor a es al segmento menor b (Dictiotopografía 1).

“Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor” y se expresa matemáticamente en términos proporcionales: $\{(a+b)$ es a como a es a b $\}; \{ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \}$ en donde $a/b = \phi = 1.618033$ (Euclides: los elementos: definición 3 del libro sexto).



Si $a/b = \phi = 1.618033$, entonces $1 + \phi^{-1} = \phi$ lo cual implica que $\phi + 1 = \phi^2$

Así se obtiene la ecuación $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, siendo a , b y c los coeficientes del término cuadrático ($a = 1$), término lineal ($b = 1$) y término independiente ($c = -1$) respectivamente.

Sustituyendo los valores de los coeficientes a , b y c para encontrar el valor de x por medio de la fórmula general de segundo grado y tomando sólo la raíz positiva, se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = 1.618033 = \phi$$

Comprobando con:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Transponiendo $1/2$, y encontrando el común divisor, se tiene:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \phi = 1.618033$$

Otro método para obtener el valor de ϕ es por medio de la Serie de Fibonacci (1170-1250)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \quad \text{si } a_0 = 0, a_1 = 1, \text{ entonces } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n > 1)$$

$$\phi = 1.618033988749894848204587$$

$$\phi^2 = 2.618033988749894848204587$$

$$\phi^0 = 1$$

$$\phi^1 = 1\phi + 0$$

$$\phi^2 = 1\phi + 1$$

$$\phi^3 = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = 13\phi + 8$$

$$\phi^8 = 21\phi + 13$$

Nótese como en el segundo miembro de cada una de las ecuaciones, los coeficientes del término lineal y los términos independientes estructuran nuevamente la Sucesión de Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \infty$$

Esta sucesión se forma al obtener cualquier número sumando los dos términos que le preceden y la serie tiende al infinito (∞); así mismo, el cociente que resulta dividiendo cualquier número de la serie entre el que le precede, converge (por la izquierda y la derecha) en ϕ , lo cual se expresa en el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \phi = 1.618033$$

que se relaciona con ecuación (Fórmula de Binet)

$$a_0 = \frac{(\phi^n - (1 - \phi)^n)}{\sqrt{5}}, \quad \text{donde } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033$$

Esta propiedad geométrica fue descubierta por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) quien expresó: “*La geometría tiene dos grandes*

tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de plata; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa". Esta propiedad fue demostrada matemáticamente por el inglés Robert Simpson (1799-1877) (Diciotopografía 1).

A Fibonacci, nombrado en los escritos medievales y renacentistas como Leonardo de Pisa (1170-1250), se le conoce, más que por su obra, por la serie recurrente en la que cada término es suma de los dos que le preceden: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... escrita por Leonardo en el margen del texto de su libro más conocido, *Liber abaci* (Leonardo de Pisa, 1202). Los matemáticos modernos han señalado importantes propiedades de esta serie, bautizada por Édouard Lucas como serie de Fibonacci, y llaman a sus elementos números de Fibonacci; serie que involucra números irracionales que, sin embargo, da resultados enteros. (Alegría, P., 2009).

La geometría de los poliedros y sólidos platónicos (tetraedro, hexaedro octaedro, dodecaedro e icosaedro), cargada de atributos, culturales, estéticos, simbólicos, científicos, místicos y cósmicos, ha fascinado en todas las épocas a artistas, filósofos, científicos, ingenieros, diseñadores, arquitectos y teólogos (Díaz y Canino, 2012).

El esfuerzo por reencontrar la proporcionalidad, se repite en quienes han tomado de los griegos la forma de interpretar el cosmos. Tal es el caso de Marco Vitruvio Polion, quien escribió dos siglos después de Platón, diez libros sobre el bagaje arquitectónico greco-romano y acepta el mismo principio, pero dice que la simetría consiste en el acuerdo de medidas entre los diversos elementos de la obra y éstos con el conjunto Vitruvio ideó una fórmula matemática para la división del espacio dentro de un dibujo, conocida como la sección áurea o de oro, que se basa en una proporción dada entre los lados más largos y los más cortos de un rectángulo (Blanco, F., 2005).

Este autor comenta que dicha simetría está regida por un módulo o canon común: El Número. También estableció una afinidad entre el Hombre y las figuras geométricas, al descubrir que el Hombre de pie con los brazos extendidos puede inscribirse en un cuadrado y si separa las piernas puede inscribirse dentro de un círculo, que tiene como centro el ombligo. Estas ideas sobre la armonía y la proporción tomaron un nuevo impulso 14 siglos después, durante el Renacimiento Italiano. Un matemático quien además era sacerdote, Fray Luca Paccioli, la denominó "Divina Proporción", sosteniendo que era una de las múltiples razones o cocientes que podían expresar una proporción numérica. Esta fórmula matemática permitía adaptarla al Hombre y humanizarla, lo que ha hecho

su perennidad a través de los siglos. Leonardo da Vinci el mayor exponente del Renacimiento, estudió la belleza humana.

Asevera además que también empleó las proporciones divinas y retomó los análisis hechos por Vitruvio Polion en cuanto a la sección áurea. Da Vinci se inspiró en los estudios hechos por Vitruvio acerca de las proporciones humanas para hacer el famoso dibujo que se encuentra en la Galería de la Academia en Venecia y se titula “El Hombre Vitruviano” Este dibujo hecho a lápiz, tinta y acuarela, corresponde perfectamente al esquema descrito por Vitruvio sobre las proporciones corporales, aunque existen en diversos museos del mundo, otros grabados en los que Leonardo analiza también las proporciones del cuerpo humano y particularmente de la cara.

Kazlacheva (2017), afirma que la razón dorada y la secuencia de Fibonacci se utilizan en proporción al diseño y patrón de elementos y piezas en vestidos y chaquetas de mujer directamente o con la ayuda de figuras geométricas en proporciones de números de oro o de Fibonacci: el triángulo dorado, un triángulo isósceles con la proporción de la base a la pierna que es igual a la Sección Dorada; el rectángulo dorado, un rectángulo con lados cuya división es igual a la proporción áurea; triángulos y rectángulos con lados en proporciones de secuencia de Fibonacci.

La relación de la música con las matemáticas, establecida ya por los pitagóricos mediante el experimento realizado por Pitágoras (¿-¿) consistente en tensar una cuerda que al vibrar producía un sonido que tomó como fundamental y le llamó Tono, encontrando las relaciones $1/2$, $2/3$ y $3/4$ que reflejan la octava, la quinta y la cuarta respectivamente. La música fue descrita por algunos reconocidos matemáticos como: “*La música es la ciencia de toda proporción y toda relación como tal*” (Aristóteles ¿-¿); “*la música es un ejercicio de aritmética secreta*”, (Leibniz 1646-1716), “*la geometría es una música inmóvil*” (Goethe 1749-1832), “*la música es un arte terriblemente euclidiano*” (Alejo Carpentier 1904-1980), *la música es la matemática del sentido en donde la matemática es la música de la razón*” Puig Adam (1900-1960); (Peralta, J. s/f), “*las leyes físicas han de tener belleza matemática*” Paul Dirac (1902-1984).

De igual manera, el autor cita la relación ente las matemáticas y la poesía de Poincaré (1854-1912), Charles L. Dogson (*seud.* Lewis Carrol 1830-1898), José de Echegaray (1832-1916) y a Julio Rey Pastor (1888-1962) quien describió “*no nos asustemos de esta improvisada amistad del álgebra y la poesía; que conjuntamente conforman el álgebra superior de las metáforas*”.

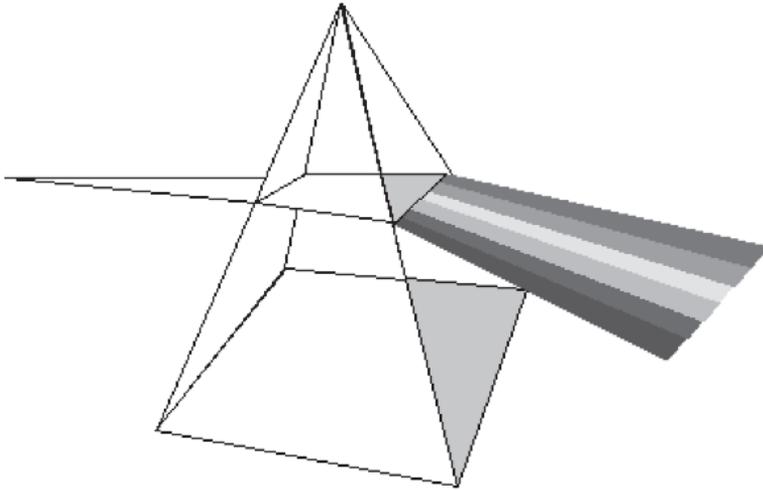
En Artes Plásticas el concepto de la belleza y de lo bello ha ido evolucionando y modificándose con el paso del tiempo; y efectivamente, no puede hablarse de una evolución lineal como la producida en otros

ámbitos de conocimiento, por ejemplo el científico, ya que han existido continuos avances y retrocesos, siguiendo un modelo pendular frente al lineal; de hecho, lo que hace un tiempo era muestra del ideal de belleza, hoy puede ser considerado como la antítesis de la misma. La adopción de la misma por creadores antiguos, renacentistas, modernos y contemporáneos (Imothep-Hermes, Keops, Platón, Vitruvio, Pacioli, Leonardo, Kepler, Descartes, Tesla, Dalí, Ghyka, Einstein), como elemento consciente generador de las más diversas producciones artísticas, son consecuencia de las excepcionales características y propiedades gráficas que se derivan de esta proporción en relación a la consideración ideal de belleza (López, I., 2008).

Mihas, P., 2008, afirma que existe una discusión histórica de las teorías que tratan sobre la formación de imágenes reales en espejos y lentes que aparecieron ya con Platón (427-347 a.C.); se describen además los enfoques de Euclides (325-265 a. C.), Herodoto (?-?) y Ptolomeo (?-?) para los rayos visuales. La teoría sobre los espejos ardientes comienza con Diocles (104-146) y luego tuvo continuidad por los árabes, entre los cuales destaca Al Haytham (?-?), quien estudió extensamente el reflejo de los rayos de luz en los espejos cóncavos. Por su parte, Huygens (1629-1695) intentó encontrar una forma más corta de hacer los cálculos utilizando las lentes de Kepler (1571-1630) y dio una nueva forma de encontrar la posición de las imágenes mediante el uso de aproximaciones; además dio una solución para la forma de una lente “perfecta”. El principio de Christian Huygens (1629-1695) sobre las olas se puede combinar con el principio de Pierre de Fermat (1601-1665) para explicar la formación de imágenes que ayudó a comprender mejor la formación de imágenes, la propagación de las ondas y las propiedades de las lentes, así como las Ecuaciones de Maxwell para entender la relación que existe entre la velocidad de la luz con las constantes eléctrica y magnética.

Sin duda el personaje científico más representativo sobre investigaciones de óptica como parte de la física, además de Galileo Galilei (1564-1642), fue Sir Isaac Newton (1643-1727) con su invento del telescopio de reflexión con lentes parabólicas y el uso de prismas para descomponer la luz solar que al reflejarla se observa en la pantalla como una banda continua del espectro visible (fig. 1), para con ello dar paso a las teorías ópticas que fueron continuamente revisadas en los siglos posteriores a Newton, en donde De Broglie y Bohr establecieron el cambio más fundamental introducido por Albert Einstein, quien sugirió en 1905 que las ondas de luz están formadas por *quantos* de energía (Fara, P., 2018), tal como lo dedujo previamente Max Planck (1848-1947) en 1890 y que posteriormente desarrolló W. H. Heisemberg (1901-1976) con el Principio de Incertidumbre.

Figura 1.
Experimento de Newton de la luz solar
y la banda continua del espectro visible.



Fuente imagen: Dicitopografía 2.-

En Física Cuántica, a fórmula de Binet se utilizó para calcular al oscilador armónico de *Quantum* para el cual se deriva de modo que su espectro está dado sólo por números de Fibonacci. Se encuentra que la proporción de niveles de energía sucesivos es la secuencia Dorada, y para los estados asintóticos en el límite $n \rightarrow \infty$ aparece como la Proporción Áurea., por lo cual este oscilador es llamado “el oscilador dorado”. Cuando se usan bosones dorados dobles, se obtiene el momento angular dorado y su representación se establece en términos de números de Fibonacci y la proporción áurea (Pashaev. y Nalci, 2012).

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{(\phi^n - (1 - \phi)^n)}{\sqrt{5}}, \quad \text{donde } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \mathbf{1.618033}$$

Esta ecuación fue desarrollada por el francés Alfred Binet (1857-1911), aunque el resultado fue conocido por De Moivre (1667-1754),

Euler (1707-1783) y Daniel Bernoulli (1700-1782) más de un siglo antes.

Además, la proporción áurea se utiliza para la predicción de la mezcla de neutrinos solares con cuyos datos de gran precisión se pueden obtener pistas sobre la física subyacente. Estos datos implican que la proporción áurea se puede conectar a la mezcla de neutrinos solares en la cual existen dos posibilidades atractivas, no muy lejos de los valores de mejor ajuste y compatibles con los rangos actuales, éstas se han comparado con las correcciones radiactivas estimadas y han sido útiles para proponer un modelo basado en el grupo diedro como un polígono regular que conduce a la relación angular estrechamente relacionado con la simetría de un decágono, lo que naturalmente lleva a considerar su grupo de simetría rotacional (Adulpravitchai *et al.*, 2009).

El espectro de Fourier de una curva de luz artificial con dos fragmentos sinusoidales con longitudes L y S en una proporción áurea y siguiendo una secuencia de Fibonacci puede observarse claramente. El análisis muestra que los períodos principales aparecen con un factor que está en relación con las duraciones de los fragmentos sinusoidales que forman la curva de luz. Las frecuencias f del espectro de Fourier de las secuencias de Fibonacci pertenecen a un conjunto que consiste en combinaciones lineales con coeficientes enteros de dos frecuencias fundamentales $f = m_1 f_1 + m_2 f_2$ donde f_1 y f_2 están en una proporción áurea y m_1 , m_2 son enteros (Bombieri y Taylor 1996).

Johann Jacob Balmer (1825-1898) observó que el espectro visible del hidrógeno (H^*) se reflejan cuatro líneas lumínicas verticales que se ajustan a valores de 6562, 4860, 4340 y 4101 Amstrongs (A°) respectivamente. Al aplicar la razón 9/5 al valor mayor de la serie se obtiene un valor constante de 3645 (constante de Balmer B) que al multiplicarse por las razones 12/16, 25/21 y 36/32 expresadas en términos de cuadrados perfectos, se obtienen las otras tres longitudes de onda:

Cuadro 1.
Constante de Balmer, sus razones proporcionales y las longitudes onda obtenidas.

Constante de Balmer (B).	Razón proporcional	Razón proporcional en términos de cuadrados perfectos	Longitudes de onda obtenidas (A°)
3645	9/5	$3^2/(3^2-2^2)$	6563 (rojo) (*)
3645	16/12	$4^2/(4^2-2^2)$	4861 (azul) (*)
3645	25/21	$5^2/(5^2-2^2)$	4341 (violeta) (*)
3645	36/32	$6^2/(6^2-2^2)$	4102 (violeta) (*)

Fuente: Elaboración propia en base a Dicitopografía 8. (*) Armstrong (A°).

Así mismo, los espectros de destellos azules/ópticos contienen una gran cantidad de información sobre la respuesta de la atmósfera estelar inferior para destellar la entrada de energía, que se puede diagnosticar a través de mediciones de línea y continuo, observando la región de salto de Balmer ($\lambda = 3646 \text{ \AA}$, que corresponde al borde de longitud de onda larga del continuo de recombinación sobre hidrógeno $n = 2$ (Kowalski *et al.*, 2017).

En la ingeniería civil (topografía) se utiliza la medición con modo Prisma, para obtener medidas de distancias mediante el método de Medición Electrónica de Distancias (EDM), en donde el anteojo utiliza un rayo láser rojo visible y ancho (656 nm), el cual emerge de forma coaxial del objetivo del anteojo. Después de que la EDM cree la señal y de su desplazamiento a través de la atmósfera, la señal de medición llega al prisma de topografía. En ese momento, la señal debe reflejarse hacia el instrumento (Mao y Nindl, 2009) para obtener una lectura precisa de la distancia que separa el punto de la estación con el objeto o punto observado.

Por su parte, Gonzáles, A. (2001), manifiesta su escepticismo sobre la existencia de fundamentos científicos en conceptos como *bioenergía*, *energía vital* y *energía piramidal*. Argumenta que “los campos magnetoestáticos son conservativos, lo que significa que en las condiciones de la pirámide, donde todo está en reposo, el campo magnético es absolutamente incapaz de transmitir la supuesta energía que sirve para curar. Otras veces se habla de “energía cósmica” o términos similares, tratando de explicar lo inexplicable con algo que tampoco tiene explicación. El término “energía piramidal” tampoco aparece registrado en el diccionario, mucho menos en la literatura científica”.

Sin embargo, en este trabajo se desarrollará el cálculo y diseño de una pirámide (prisma) cuadrangular perfecta con lado y apotema igual a PHI (Φ); además, se describirán algunas similitudes que guardan las proporciones piramidales con el electromagnetismo (fuerza fundamental de la naturaleza) y las constantes físicas universales (física cuántica).

MATERIALES Y MÉTODOS

Se realizó una compilación bibliográfica y revisión audiovisual para analizar los contenidos temáticos sobre diseños geométricos de pirámides (prismas) de base cuadrada a efecto de realizar el cálculo de sus dimensiones, características y propiedades físicas en términos de (Φ). Para el diseño de las figuras geométricas se utilizó los programas: Autocad (ver. 2017), el editor matemático Daun Equation Editor (ver. 2018) y la calculadora Magic Number 2 (ver. 2018).

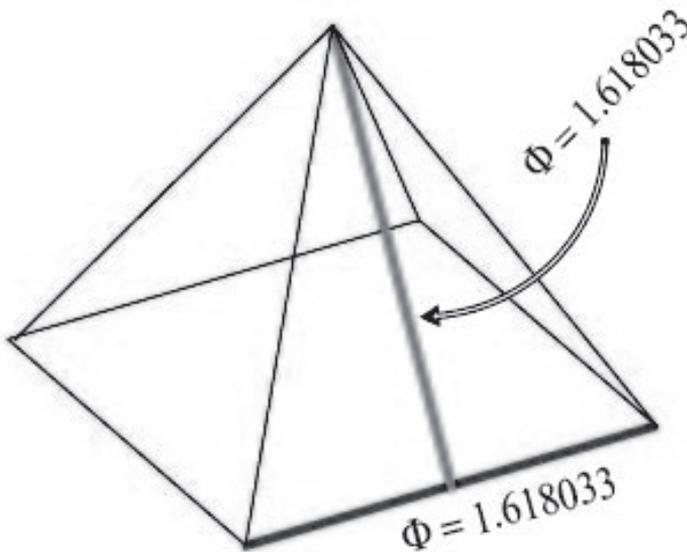
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Desarrollo del cálculo y diseño de la pirámide cuadrangular perfecta.
(Diciotopografía 3)

$$\Phi = \text{PHI} = \{(1 + \sqrt{5}) / 2\} = 1.618033$$

Para: Lado de la Base (b) y la Apotema (A_p) = Φ

Figura 2.
Pirámide cuadrangular perfecta con lado de la base y apotema igual a PHI (Φ).



Fuente: Elaboración propia (2018).

Cálculo de la altura (h) conocidos el lado de la base (b) y la apotema (A_p)

Ya que la altura (h) es una línea recta perpendicular al eje del plano horizontal y que une el vértice superior con el centro del cuadrado de lado (Φ); para calcular la altura (h) de la pirámide cuadrangular perfecta utilizando el Teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\Phi_{A_p}^2 = \left(\frac{\Phi_b}{2}\right)^2 + h^2$$

Desarrollando el primer término del segundo miembro de la ecuación:

$$\Phi_{Ap}^2 = \frac{\Phi_b^2}{4} + h^2$$

despejando la altura (h) al cuadrado:

$$h^2 = \Phi_{Ap}^2 - \left(\frac{\Phi_b}{2}\right)^2$$

desarrollando el segundo término del segundo miembro de la ecuación:

$$h^2 = \Phi_{Ap}^2 - \frac{\Phi_b^2}{4}$$

si los valores de la apotema y el lado de la base son iguales a PHI (Φ), entonces:

$$\Phi_{Ap} = \Phi_b = \Phi$$

desarrollando operaciones:

$$h^2 = \frac{4\Phi^2 - \Phi^2}{4} = \frac{3\Phi^2}{4}$$

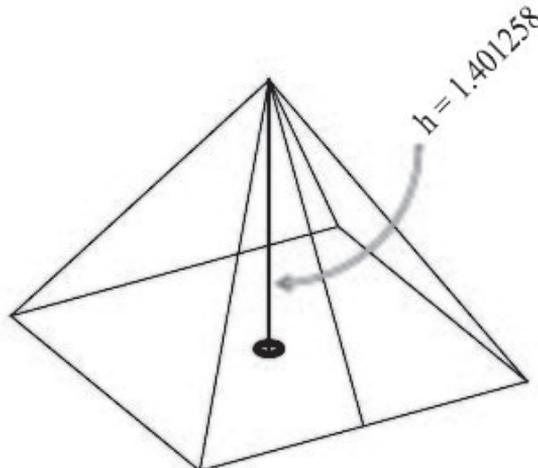
encontrando el valor de (h):

$$h = \sqrt{\frac{3\Phi^2}{4}} = \Phi\sqrt{\frac{3}{4}} = 1.401258$$

Comprobando:

$$h = \sqrt{\Phi_{Ap}^2 - \left(\frac{\Phi_b}{2}\right)^2} = 1.401258$$

Figura 3
Altura de la pirámide cuadrangular perfecta.



Fuente: Elaboración propia (2018).

Cálculo de la Arista (A)

Para calcular el valor de la arista (A) es necesario obtener el valor de la diagonal (d) que une el centro del cuadrado perfecto con el vértice de la base:

$$d^2 = \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2$$

desarrollando operaciones:

$$d^2 = \left(\frac{\Phi^2}{4} + \frac{\Phi^2}{4}\right) = \frac{2\Phi^2}{4} = \frac{1}{2}\Phi^2$$

por lo tanto, se obtiene el valor de la diagonal

$$d = \sqrt{\frac{1}{2}\Phi^2} = \Phi\sqrt{\frac{1}{2}} = 1.144122$$

ahora, para calcular el valor de la arista (A), se utiliza el Teorema de Pitágoras:

$$A^2 = h^2 + d^2$$

Si h es igual a $\Phi\sqrt{\frac{3}{4}}$ y $d = \Phi\sqrt{\frac{1}{2}}$ sustituyendo se tiene:

$$A^2 = \left(\Phi\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 + \left(\Phi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$$

elevando al cuadrado los dos términos del segundo miembro de la ecuación:

$$A^2 = 3/4\Phi^2 + 1/2\Phi^2$$

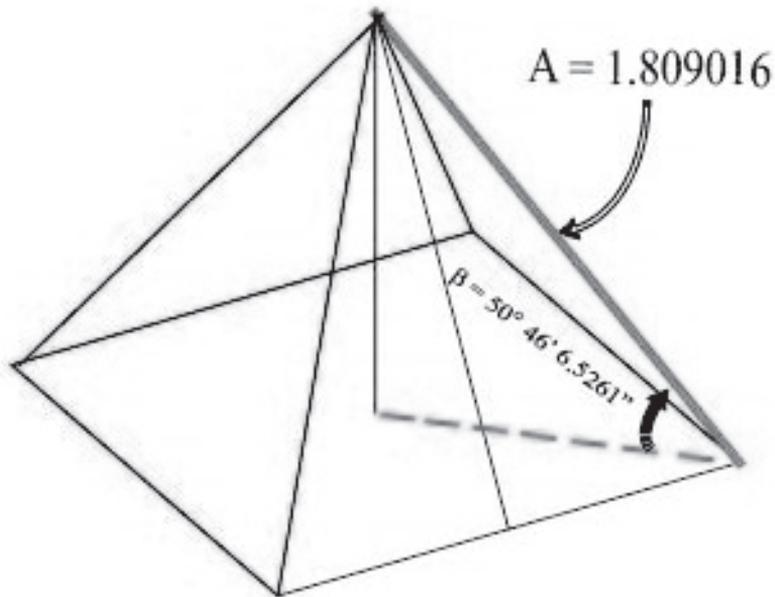
utilizando el común denominador en el segundo miembro de la ecuación:

$$A^2 = \frac{3\Phi^2 + 2\Phi^2}{4} = \frac{5\Phi^2}{4} = 5/4\Phi^2$$

transponiendo el exponente de (A):

$$A = \sqrt{5/4\Phi^2} = \Phi\sqrt{5/4} = 1.809016$$

Figura 4.
Valores de la arista (A) y su ángulo de elevación (β).



Fuente: Elaboración propia (2018).

Un resultado interesante es que ϕ como una constante adimensional, interviene en el cálculo para obtener proporciones armónicas representadas por números reales puros, que resultan tras anularse ϕ en sí misma como se observará a continuación.

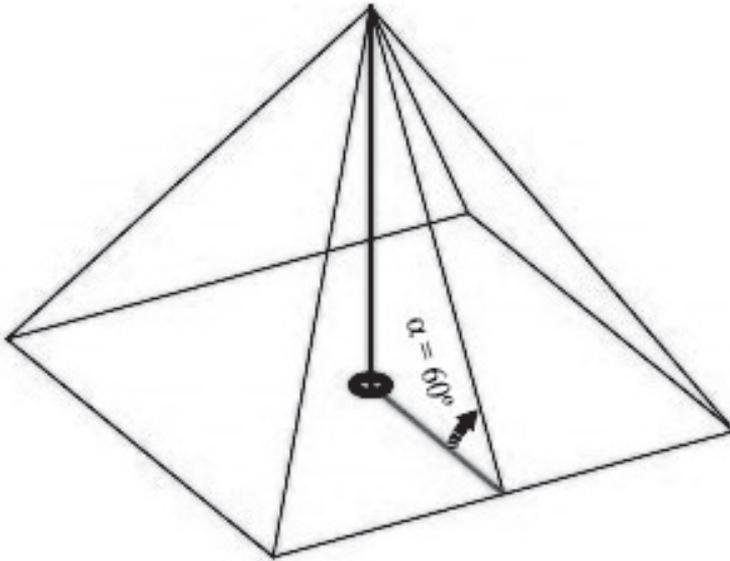
Para calcular el ángulo (α) de la apotema (A_p) se utiliza la función trigonométrica *Sen*:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{h}{A_p} = \frac{\phi \sqrt{\frac{3}{4}}}{\phi} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.866025$$

utilizando el Arco Seno del ángulo (a) para encontrar el ángulo de elevación de la Apotema:

$$\text{Sen}^{-1} 0.866025 = 60^\circ$$

Figura 5
Valor del ángulo de elevación (α) de la apotema (A_p).



Fuente: Elaboración propia (2018).

Para calcular el ángulo (β) de la arista (A)

Se utiliza el Arco Seno del ángulo (B) para encontrar el ángulo de elevación de la Arista:

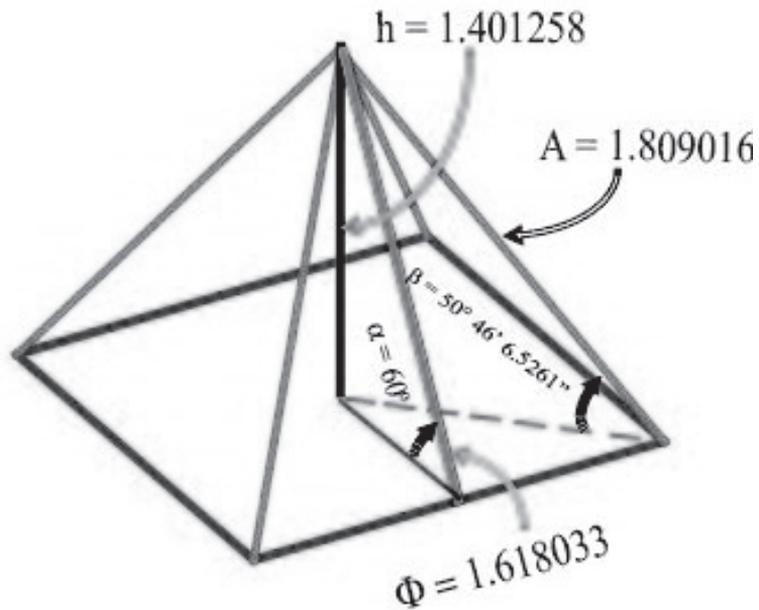
$$\text{Sen } \beta = \frac{h}{A} = \frac{\phi \sqrt{\frac{3}{4}}}{\phi \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{0.75}}{\sqrt{1.25}} = \sqrt{\frac{0.75}{1.25}} = \sqrt{0.6} = 0.774596$$

utilizando el Arco Seno del ángulo (B) para encontrar el ángulo de elevación de la Arista:

$$\text{Sen}^{-1} 0.774596 = 50^{\circ} 46' 6.5261'' \quad (\text{fig. 6})$$

Como resultado del cálculo y diseño de las proporciones doradas para una pirámide cuadrangular perfecta con lado y apotema igual a (ϕ), se obtuvo la siguiente (Fig. 6):

Figura 6.
Medidas, ángulos y proporciones para una pirámide cuadrangular perfecta con lado y apotema igual a (Φ) .



Fuente: Elaboración propia (2018).

Las dimensiones proporcionales para una pirámide perfecta con base y apotema = (Φ) , se observan el Cuadro 2.

Cuadro 2.
Resultados del cálculo de las proporciones: pirámide con base y apotema = (Φ).

PROPORCIONES PARA UNA PIRÁMIDE PERFECTA CON BASE CUADRADA Y VALORES REALES PUROS		
	<i>(1:1)</i>	<i>(1:100)</i>
LADO BASE (Φ) (cm)	1.618033989	161.803398874989
APOTEMA (Φ) (cm)	1.618033989	161.803398874989
ALTURA (cm)	1.401258538	140.125853844407
DIAGONAL CENTRO-VÉRTICE BASE (cm)	1.144122806	114.412280563537
ARISTA (cm)	1.809016994	180.901699437495
SENO ÁNGULO (α) APOTEMA	0.866025404	
ÁNGULO (α) DE LA APOTEMA	60°	60.000000024701°
SENO ÁNGULO (β) DE LA ARISTA	0.774596669	
ÁNGULO (β) DE LA ARISTA	50° 46' 6.5261 "	
NOTAS:		
LADO Y BASE IGUALES ($\Phi = PHI$) (PROPORCIÓN AÚREA)*	1.618033989	$\Phi = PHI = \{(1 + \sqrt{5}) / 2\}$

* "Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".
EUCLIDES: LOS ELEMENTOS (DEFINICIÓN 3 DEL LIBRO SEXTO).

Fuente: Elaboración propia (2018).

Relaciones de la pirámide cuadrangular perfecta con lado y apotema igual a Φ y la física cuántica

Para analizar la física cuántica en términos de Φ , es necesario relacionar en todo momento las ideas preconcebidas sobre física clásica (Newton) y la física relativista (Einstein), tomándolas como base a fin de ingresar en el conocimiento del mundo cuántico como parte del estudio y del conocimiento de una nueva física.

Para tal efecto, se procedió a calcular el valor del Angulo Áureo en términos de Φ y su relación con la circunferencia (360°) (Figuroa, M.¹).

$$((360^\circ \times \Phi) - 360^\circ) / \Phi = 137.50776405^\circ \quad (\text{teorema 1})$$

(Ángulo Áureo \cong inverso multiplicativo de la Constante de la Estructura Fina = α)

$$\alpha = |1 / 137.50776405| = 0.0072 \quad (\text{valor absoluto})$$

de forma axiomática se obtiene el segundo Angulo Áureo:

$$360^\circ - 137.50776405^\circ = 222.49223594^\circ \quad (\text{axioma 1})$$

en donde $|1/222.49223594| = \mathbf{0.00449453885}$, hipotéticamente se llamaría Factor Constante Universal Complementario de la Constante de la Estructura Fina (Figuroa, M.¹); en donde dicho factor estaría relacionado con el Tamaño del Universo Observable ($\ell = 4.38 \times 10^{28} \text{ cm}$), la Densidad Crítica del Universo ($\rho_{crit} = 8.64 \times 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$), la Fracción Almacenada en Bariones ($\Omega_b = 0.0485$) y la Masa del Protón $m_p = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g}$ (Diciotopografía 4), el Principio de Mínima Acción, el Electrón y el Positrón, el Mar de Dirac y el Principio de Exclusión de Wolfgang Ernest Pauli (1900-1958).

Una manera físicamente ortodoxa de obtener el valor de la Constante de la Estructura Fina (interacción electromagnética atómica y nuclear), es:

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{h c 4\pi \varepsilon_0}$$

α = Constante de la Estructura Fina = 0.0072.

ε = Constante Elemental de la Carga del Electrón. = $1.602176565 \times 10^{-19}$
Coulomb (C)

h = Constante de Planck = $6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

c = Constante de la Velocidad de la Luz en el Vacío = 299, 792,458 km/s

π = Relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro = 3.14159265.

ε_0 = Permitividad en el Vacío = $8.854187817620389850536563 \times 10^{-12}$
F/m

La Luz tiene dos componentes: el campo eléctrico y el campo magnético, ésta se comporta como partícula y como onda a la vez. La partícula tiene energía (E) y cantidad de movimiento (p) mientras que las ondas tienen frecuencia (f) y longitud de onda (λ); aunque ambas tienen diferentes propiedades, éstas están íntimamente correlacionadas. Max Planck encontró que la energía de la luz estaba relacionada con la frecuencia de la onda, cuyo principio utilizó De Broglie (1892-1987) para indicar las posiciones de las órbitas de los electrones, concepto que a su vez utilizaron Bohr (1885-1962) y Einstein para explicar sus teorías atómica y relativista (Diciotopografía 5).

De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, la Constante Eléctrica (K_e) dividida entre la Constante Magnética (K_m) es igual a la Velocidad de la Luz (c) al cuadrado:

$$c^2 = \frac{K_e}{K_m} = (299,792,458)^2 \text{ (km}^2 \text{ s}^{-2}\text{)}$$

c = Velocidad de la Luz en el Vacío: (299, 792,458 km s⁻¹).

K_e = Constante Eléctrica (9 X 10⁹ Nm² C⁻²)

K_m = Constante Magnética (1 X 10⁻⁷ Ns² C⁻²).

De igual manera, Maxwell dedujo que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas (velocidad de la luz) se pueden obtener conociendo la permisividad eléctrica (ϵ_0) y su permeabilidad magnética (μ_0), con la siguiente ecuación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

c = Velocidad de la Luz en el Vacío: (299, 792,458 km s⁻¹).

ϵ_0 = Permisividad eléctrica: (8.8544 X 10⁻¹² N⁻¹ m⁻¹ C⁻²)

μ_0 = Permeabilidad magnética: (1.2566 x 10⁻⁶ m kg C⁻²)

Considerando que la partícula contiene energía (E) y cantidad de movimiento (*momento*) (p) = mv y que las ondas tienen frecuencia y longitud de onda; de acuerdo con la teoría de Planck, la ecuación $E = hf$ asocia la partícula de luz y la frecuencia de su onda, relación que a su vez utilizó De Broglie con la energía (E) que contiene una partícula de acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein $E = mc^2$, deduciendo así que $mc^2 = h(C\lambda)$ y que las partículas al viajar a menor velocidad que la velocidad de la luz contienen cantidad de movimiento ($p = mv$), que se expresa de la siguiente manera (Diciotopografía 5):

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

y la

$$\text{Longitud de la partícula} = \frac{c}{\hbar p}$$

en donde:

p = Cantidad de movimiento (*momentum*).

λ = Longitud de onda.

h = Constante de Planck = $6.62606957 \times 10^{-34}$ J.s

$\hbar = h/2\pi$ ($\hbar = h$ con barra constante de Dirac).

c = Constante de la Velocidad de la Luz en el Vacío = 299, 792,458 km/s

f = Frecuencia.

Así, se demuestra que las partículas puede comportarse como ondas y las ondas como partículas y que los haces de electrones pueden ser difractados en forma muy similar a los rayos de luz, tal como sucede al utilizar los prismas (pirámides).

De acuerdo con el Principio de Incertidumbre de W. H. Heisenberg (1901-1976), cuando la incertidumbre de posición y la incertidumbre de la cantidad de movimiento se combinan, el producto es aproximadamente la constante de Planck.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/4\pi$$

siendo h la Constante de Planck y ($\hbar = h$ con barra), luego entonces, para:

$$\hbar = h/2\pi$$

la ecuación que define el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, queda:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

siendo:

Δx = indeterminación en la posición.

Δp = indeterminación en la cantidad de movimiento

la cual explica, a través de la Mecánica Cuántica, que es imposible conocer al mismo tiempo y con absoluta precisión el valor de la posición y la cantidad de movimiento de una partícula; ya que ésta, por su constante desplazamiento y vibración, no tiene una trayectoria totalmente definida.

Como se puede observar, el análisis físico-cuántico de la Constante de la Estructura Fina (α) en términos de (ϕ), (e) y (π), inicia con la constante de Planck y termina con la constante de Planck.

Calculando el número de Balmer (B) en función de α , ϕ , e y π se obtiene:

(Dictiotopografía 6)

$$B = \frac{\phi^2}{\alpha} + e + \pi = 364.6247774$$

en donde intervienen las siguientes constantes (números irracionales y adimensionales):

$\phi = 1.61809833$ (Número de Oro ó Divina Proporción)

$\alpha = 0.00727231$ (Constante de la Estructura fina)

$\pi = 3.14159265$ (Relación entre la circunferencia y su diámetro)

$e = 2.71828182$ (Base de los logaritmos naturales)

La ecuación de Balmer se expresa:

$$\lambda = B \left(\frac{m^2}{m^2 - n^2} \right)$$

donde $B = 3645$, $n = 2$ y m son valores enteros (v.g. 3, 4, 5, 6...)

Esta ecuación fue reconfigurada por J. R. Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = Rh \left(\frac{1}{n_1 - n_2} \right)$$

en donde:

Rh es la constante de Rydberg, que se deduce de la siguiente ecuación:

$$Rh = \frac{2\pi \cdot m_e \cdot Z^2 \cdot \epsilon^4}{h^3 \cdot c} = 10973731.568549 \text{ m}^{-1}$$

siendo

$Rh =$ Constante de Redberg. **10973731.568549 m⁻¹**

$\pi =$ Relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro = 3.14159265.

$m_e =$ Masa del electrón. 9.1×10^{-31} kg.

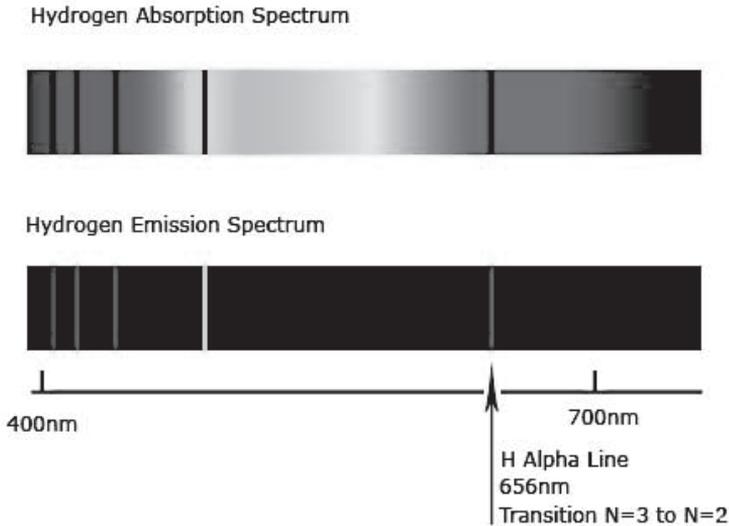
$Z =$ Número atómico. Para el hidrógeno = 1.

$\epsilon =$ Constante Elemental de la Carga del Electrón. = $1.602176565 \times 10^{-19}$ Coulomb (C)

$h =$ Constante de Planck = $6.62606957 \times 10^{-34}$ J.s

$c =$ Constante de la Velocidad de la Luz en el Vacío = 299, 792,458 km s⁻¹

Figura 7.
Espectros de absorción y emisión del hidrógeno.



Fuente de la imagen: Dicitopografía 7.

En el Cuadro 3 se relacionan las constantes universales utilizadas en este trabajo de investigación:

Cuadro 3.
Constantes universales más utilizadas en la Física Cuántica, Clásica y Relativista.

CONSTANTE	SIMBOLO	VALOR	UNIDADES
Velocidad de la Luz en el Vacío	C	299,792.458	km/s
Carga Eléctrica Elemental	e	$(1.602176462) 10^{-19}$	Coulomb (C)
Constante de Faraday	F	96,485.3365	C . mol ⁻¹
Masa del electrón	m _e	9.1×10^{-31}	kg
Constante de Avogadro	N _A	$(6.02214199) 10^{23}$	mol ⁻¹
Constante de Rydberg	R _h	10973731.568549	m ⁻¹
Constante de Planck	h	$(6.62606876) 10^{-34}$	J.s
Permitividad en el Vacío	ε	$(8.854187817) 10^{-12}$	F/m
Masa del Protón	m _p	1.67×10^{-24}	g
Constante de la Estructura Fina	α	$(7.297352533) 10^{-3}$	adimensional
Número de Balmer	B	364.624777408	adimensional
Base de los logaritmos neperianos	e ^x	2.7182818459	adimensional
Perímetro/diámetro (circunferencia)	π	3.141592653	adimensional
Proporción Áurea o Divina Proporción	φ	1.6180339887	adimensional

Fuente: Elaboración propia (2018).

Existen otras relaciones interesantes que relacionan la física cuántica con la química clásica (*v.g.*).

$$N_A = \frac{F}{e}$$

siendo:

N_A = Número de Avogadro ($6.02214199 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)

F = Constante de Faraday ($96,485.3365 \text{ C mol}^{-1}$)

e = Carga elemental del electrón ($1.602176462 \times 10^{-19} \text{ C}$).

además, de manera matemática se pueden relacionar otras constantes geométricas, numéricas y universales (*v.g.*):

calculando el Codo Sagrado:

$$\frac{6}{5} \phi^2 = 3.14164078 \cong \pi$$

$$\text{Codo Sagrado} = \frac{\phi^2}{5} = 0.5236067977499789696409174 \cong \frac{\pi}{6}$$

siendo:

$$(5 \text{ discriminante de } \phi) \text{ y } \sqrt{5} = 2.236067977499789696409174 \Rightarrow \infty$$

Nótese que los decimales marcados en negritas son exactamente iguales hasta el infinito, lo cual evidencia la relación que existe entre $\phi^2 \phi^2$, $\pi \pi$ y los números enteros cinco y seis.

CONCLUSIÓN

Una pirámide diseñada con lado de la base (b) y apotema (A_p) igual a PHI (ϕ), representa la armonía geométrica de las secciones áureas que mediante el análisis de las proporciones doradas, matemáticamente dan como resultado valores puros, cuya perfección estética primero se percibe con los sentidos para después ser analizada por el intelecto. Además, existe una relación que asocia al Número Áureo (ϕ) con el Número de Balmer (B), la Constante de la Estructura Fina (α), los números irracionales (p), (e) y la Constante de Rydberg (Rh) para el átomo de hidrógeno. Estas relaciones muestran las propiedades de un prisma de cristal (pirámide) que no sólo refracta un rayo de luz, sino también revela que una simple luz blanca esta compuesta por todos los colores del arcoíris, perturbación ondulatoria electromagnética que se observa a través de nuestro campo visual debido al proceso de dispersión de la luz.

Lo anterior se debe a que si un campo eléctrico en el universo experimenta una fuerza es porque existe un campo magnético presente, en donde, si un campo eléctrico es perturbado, se perturba también un campo magnético y viceversa; lo anterior en virtud de que la energía cuántica salta de un campo a otro y estas perturbaciones pueden detectarse a través de la vista por medio de nuestros órganos oculares; perturbaciones electromagnéticas que se presentan como una gamma de colores llamado espectro visual (longitudes de onda entre 400-700 nm), que nuestro entendimiento interpreta como colores (del violeta al rojo) y que intelectualmente explica las propiedades de la luz, como onda y como partícula en constante vibración (Diciotopografías 5 y 9).

AGRADECIMIENTOS

Al Director M. A. Wilfrido Martínez Molina y al personal de la Facultad de Ingeniería Civil (FIC); dependiente de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), por las facilidades prestadas durante el desarrollo de este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- Adulpravitchai, A., Blum, A. y Rodejohann1, W., 2009. Golden ratio prediction for solar neutrino mixing. *New Journal of Physics* 11 (2009) 063026 (13pp).
- Alegría, P. 2009, Sucesiones de recurrencia en la matemática recreativa. *Rev. Eureka. Enseñ. Divul. Cien.* 2009, 6(3), pp. 483-490
- Benedetto, E., 2017. Finding golden mean in a physics exercise. *Phys. Educ.* 52 (2017) 043001 (4pp)
- Blanco D., F. 2005. Las proporciones divinas: *Rev. El Arte en la Medicina, cirugía plástica* Vol. 15, Núm. 2 Mayo-Agosto 2005 pp. 118 – 124.
- Díaz C., J. R. y Canino R., C. A., 2012. Heurística de los poliedros regulares. *Revista Cubana de Ingeniería: Vol. III, No. 2, mayo - agosto, 2012, pp. 59 - 69*
- Fara P., 2015. Newton shows the light: a commentary on Newton (1672) 'A letter ... containing his new theory about light and colours...' *Phil. Trans. R. Soc. A* 373: 20140213.
- González, A., 2001. Falsas energías, Pseudociencia y Mecanismos de Comunicación Masiva. Departamento de Física Aplicada. Universidad de la Habana (Cuba). Pp. 1-7.
- Kazlacheva, Z I., 2017. An investigation of application of the golden ratio and Fibonacci sequence in fashion design and pattern making. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 254 172013.

- Kowalski, A., Cauzzi, G. y Fletcher, L., 2017. Optical Spectral Observations of Flickering White-Light Kernel in A CI Solar Flare. *The Astrophysical Journal*, 798:107 (17pp), 2015 January 10.
- López V., I. 2008. Entre la razón y el mito: arte y ciencia en la divina proporción. Universidad de Granada. *Educatio Siglo XXI*, n. ° 26 · 2008, pp. 267-288.
- Mao, Junio y Nindl, Daniel (2009). Prismas topográficos –White Paper: características e influencias. Leica Geosystems AG. Heerbrugg, Suiza. (Pp. 13).
- Mihas, Pavlos, 2008. The problem of focusing and real images. *Eur. J. Phys.* 29 (2008) 539–553
- Pashaev, O. K. y Nalci, S., 2012. Golden quantum oscillator and Binet–Fibonacci calculus. *J. Phys. A: Math. Theor.* 45 (2012) 015303 (23pp)
- Peralta, J. (s/f). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. Universidad Autónoma de Madrid. Pp. 10.

Dictiotopografía

- https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo. Recuperado el 04 de febrero de 2108.
- <https://www.google.com.mx/search?q=prisma+de+newton> (Recuperado el 28 de febrero de 2018).
- <https://www.youtube.com/watch?v=5eocyka8ciY> (Recuperado el 28 de febrero de 2018).
- <https://www.youtube.com/watch?v=lpj0E0a0mlU> Recuperado el 3 de marzo de 2017.
- <https://www.youtube.com/watch?v=LmKiCJXwuRU> (Recuperado el 04 de marzo de 2018).
- <https://www.youtube.com/watch?v=yl6awR9eHvU> Recuperado el 04 de marzo de 2018.
- <https://www.google.com.mx/search?q=espectro+del+hidrogeno> (Recuperado el 7 de marzo de 2018).
- <https://culturacientifica.com/2014/04/30/la-magica-formula-de-balmer/> (Recuperado el 7 de marzo de 2017).
- https://www.youtube.com/watch?v=UABRCr_Hql4 (Recuperado el 7 de marzo de 2018).