MERCADOS FINANCIEROS CON COMPORTAMIENTOS NO LINEALES

Fernando Ávila Carreón[1]
Joel Arturo Rodríguez Ceballos[2]

RESUMEN.

Se considera un modelo simple de fijación de precios de activos con dos tipos de operadores con aprendizaje adaptativo. Los operadores actualizan sus creencias de acuerdo con los rendimientos anteriores y las condiciones del mercado. El modelo contempla fluctuaciones internas de precio y algunos hechos estilizados observados en datos de rendimientos reales.

Palabras clave: Mercados financieros, rendimientos, operadores con aprendizaje adaptativo.

ABSTRACT.

We consider a simple asset pricing model with two types of adaptively learning traders, fundamentalists and technical traders. Traders update their beliefs according to past performance and to market conditions. The model generates endogenous price fluctuations and captures some stylized facts observed in real returns data.

Key words: Financial markets, returns, adaptively learning traders.

Clasificación JEL: C60, G10, G12.

INTRODUCCIÓN.

Los modelos financieros tradicionales descansan en el supuesto de que los mercados son informativamente eficientes (hipótesis del mercado eficiente, *EMH*) con agentes racionales que tienen información simétrica, preferencias idénticas (homogéneas) y que construyen sus expectativas sobre toda la información disponible (hipótesis de expectativas racionales). En

[1] Profesor – Investigador en la Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. E – mail: favila@itmorelia.edu.mx

[2] Profesor – Investigador en la Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

un ambiente con expectativas racionales y mercados eficientes la dinámica es dirigida por choques imprevistos y sin correlación (*shocks* tecnológicos, preferencias cambiantes, etc.). Sin embargo, estos modelos no explican algunos hechos estilizados observados en series de tiempo, como el exceso de volatilidad, colas gruesas en la distribución de la rentabilidad de las acciones o agrupamiento de la volatilidad. A pesar de que el rendimiento de los activos contiene poca correlación serial (lo cual es consistente con la forma débil de la *EMH*), los rendimientos se correlacionan entre sí mucho más en términos absolutos o cuadráticos. Estos hechos indican que los precios en los mercados financieros no están determinados únicamente por fundamentos económicos. Los mercados parecen tener dinámica interna propia y la influencia de la psicología del mercado y del "comportamiento animal" de los inversionistas.

En la última década del siglo pasado se introdujeron varios modelos que incluyen agentes heterogéneos con racionalidad limitada. Estos modelos distinguen entre dos tipos de operadores, los fundamentalistas, que creen que los precios se determinan por los fundamentos económicos, y los "gráficos", que creen que los precios pueden anticiparse por las normas del comercio simple basada en las pautas de precios en el pasado reciente.

Brock and Hommes (1997) han introducido el concepto de sistema de creencia adaptativa. Los agentes adaptan sus predicciones mediante la elección entre un número finito de predictores (creencias, expectativas), que son funciones de la información del pasado. Los agentes hacen una elección racional entre los predictores basados en una medida del rendimiento asociada a cada indicador disponible públicamente. Esto conduce a la llamada *dinámica adaptiva de equilibrio racional*, una dinámica evolutiva no lineal través de creencias o estrategias de inversión en competencia, acoplada a la dinámica de las variables endógenas. En este trabajo se hace una pequeña modificación en la aplicación de este concepto a un modelo de valoración de activos simple, atendiendo la influencia de diferentes medidas de rendimiento. Dicha modificación consiste en la aproximación de la función tangente hiperbólica derivada del tratamiento exponencial original de Brock and Hommes (1997) por la función tangente trigonométrica dada por la expresión (13). En la siguiente sección se introduce este modelo.

MODELO.

Este sistema de creencias adaptativo se basa en un modelo de fijación de precios de activos, extendida a *creencias* heterogéneas, con un activo riesgoso y otro libre de riesgo. Los agentes pueden invertir en el activo libre de riesgo, que es ofertado en forma perfectamente elástica con tasa de rendimiento bruta libre de riesgo (anualizada) r. También pueden invertir en un activo de riesgo con precio p_t (ex-dividendo) por acción, que paga un dividendo estocástico y_t, en el tiempo t.

Sea $W_{j,t}$ la riqueza del inversionista j en el tiempo t y $z_{j,t}$ el número de acciones del activo de riesgo compradas en el tiempo t. La dinámica de la riqueza se describe entonces por la ecuación

$$W_{j,t+1} = RW_{j,t} + R_{t+1} z_{j,t}, \qquad (1)$$

siendo

$$R_t = p_t + y_t - Rp_{t-1} \qquad (2)$$

el exceso de ganancia/pérdida de capital (rendimiento) por acción y

$$R = 1 + \frac{r}{K}$$

la frecuencia de negociación por año. $E_{j,t}$ y $V_{j,t}$ denotan las *creencias* o predicciones del operador tipo j sobre la esperanza condicional E_t y la varianza condicional V_t, basadas en un conjunto de información pública disponible, como los precios y los dividendos anteriores, en el tiempo t. Dicho conjunto puede expresarse por:

$$F_t = \{p_{t-1}, \cdots; y_{t-1}, \cdots\}.$$

Entonces de (1) y (2) se sigue que

$$E_{j,t}(W_{j,t+1}) = RW_{j,t} + E_{j,t}(R_{t+1})z_{j,t}, \quad V_{j,t}(W_{j,t+1}) = V_{j,t}(R_{t+1})z_{j,t}^2, \qquad (3)$$

Se supone que los agentes son maximizadores de media-varianza, por lo que la demanda $z_{j,t}$ del operador j para el activo de riesgo satisface

$$\max_{z_{jt}} \left\{ E_{j,t}(W_{j,t+1}) - \frac{a_j}{2} V_{j,t}(W_{j,t+1}) \right\}, \qquad (4)$$

Supongamos que cada inversionista tiene una función de utilidad de aversión absoluta y constante al riesgo (*CARA*)

$$u(W) = -e^{-a_j W}.$$

pero con diferentes parámetros de aversión al riesgo $a_j > 0$, maximiza su utilidad esperada de riqueza, y que las creencias acerca de las varianzas condicionales son constantes, $V_{j,t}(R_{t+1}) \equiv \sigma^2$. Esto nos lleva a que la demanda para los activos de riesgo está dada por

$$z_{j,t} = \frac{E_{j,t}(R_{t+1})}{\sigma^2 a_j}. \tag{5}$$

Sean z_{st} y $n_{j,t}$ la oferta de acciones en circulación de los activos de riesgo por inversionista y la fracción del operador tipo *j*, respectivamente. El equilibrio de la oferta y la demanda conduce a

$$\sum_j n_{j,t} z_{j,t} = z_{st} \qquad (6)$$

Nos centramos en el caso especial de oferta cero de las acciones en circulación, es decir, $z_{st} \equiv 0$. Adicionalmente supondremos que los dividendos siguen un proceso independiente e idénticamente distribuido (*IID*) con media constante

$$E_t(y_t + 1) \equiv E(y_t) \equiv \overline{y}$$

y que los operadores tienen creencias homogéneas sobre los dividendos futuros

$$E_{j,t}(y_t + 1) = E_t(y_t + 1) = \overline{y}.$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio de mercado (6) se puede reescribir como

$$Rp_t = \sum_j n_{j,t} E_{j,t}(p_{t+1}) + \overline{y} \tag{7}$$

El equilibrio del mercado por lo tanto afirma que el precio de los activos de riesgo es igual a la suma descontada del precio esperado futuro y los dividendos esperados futuros, promediado sobre todos los tipos de operador.

Consideremos primero el caso especial donde los operadores tienen expectativas homogéneas racionales, es decir,

$$E_{j,t}(p_t + 1) = E_t(p_t + 1)$$

para todo *h*. Esto nos permite definir una “solución fundamental” de referencia (precio fundamental de expectativas racionales *EMH*)

$$p^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{y}}{R^k} = \frac{\bar{y}}{R-1}. \quad (8)$$

Tengamos en cuenta que en el caso de homogeneidad de las expectativas racionales (8) es la única solución de (7) que satisface la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E_t(p_{t+k})}{R^k} = 0$$

(o “condición de ausencia de burbujas”).

Sigamos el ejemplo con dos tipos de operadores que eligen reglas de predicción lineales sencillas. El primer tipo son los llamados fundamentalistas, que creen que los precios se moverá hacia el valor fundamental de expectativas racionales p^*,

$$E_{1,t}(p_{t+1}) = p^e_{1,t+1} = p^* + v(p_{t-1} - p^*), \qquad 0 \le v \le 1. \quad (9)$$

En el caso especial $v = 1$, estos operadores utilizan el último precio observado como predictor,

$$E_{1,t}(p_{t+1}) = p^e_{1,t+1} = p_{t-1}.$$

Este tipo de operadores son los llamados *creyentes EMH*, ya que el pronóstico informal es consistente con un mercado eficiente, donde los precios siguen un comportamiento aleatorio. El segundo tipo de operadores son los operadores técnicos, que extrapolan el último cambio de precio observado,

$$E_{2,t}(p_{t+1}) = p^e_{2,t+1} = p_{t-1} + g(p_{t-1} - p_{t-2}), \qquad g \ge 0. \quad (10)$$

La ecuación de equilibrio del mercado (7) ahora se convierte en

$$Rp_t = n_{1,t}\left(p^* + v(p_{t-1} - p^*)\right) + n_{2,t}\left(p_{t-1} + g(p_{t-1} - p_{t-2})\right) + \bar{y} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

donde un término dinámico de ruido *IID* ε_t ha sido añadido a la ecuación (7), que representa el error de aproximación basado en el modelo o el ruido procedente de los operadores ruidosos, los agentes económicos cuyo comportamiento no se explica por el modelo, sino que se considera exógeno.

Sean $U_{1,t}$ y $U_{2,t}$ los excedentes acumulados por los fundamentalistas y los técnicos, respectivamente, definidos por

$$U_{j,t} = R_t z_{j,t-1} - C_j, \qquad j = 1,2,$$

donde C_j mide el costo total.

La segunda parte, condicionalmente evolutiva, del modelo, describe cómo las creencias, es decir, las fracciones, cambian con el tiempo. La idea básica es que las fracciones se actualizan con base en una medida del rendimiento de las normas de predicción, condicionado a la desviación del precio real respecto del precio fundamental p^*. En una primera etapa (parte evolutiva) las fracciones se determinan como probabilidades de elección discreta de acuerdo a la rentabilidad histórica o aptitud, pero en este trabajo son aproximadas del modo siguiente:

$$\tilde{n}_{1,t} = \frac{1+m_t}{2}, \quad \tilde{n}_{2,t} = \frac{1-m_t}{2}$$

$$Z_t = \frac{1}{m_{t+1}} \sum_j e^{\beta U_{jt}}, \tag{12}$$

donde ahora hacemos la aproximación

$$m_t = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi\beta}{4} \left(U_{1,t-1} - U_{2,t-1} + C_2 - C_1 \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\pi\beta}{4} \left(R_{t-1} \left(z_{1,t-2} - z_{2,t-2} \right) - C \right) \tag{13}$$

y Z_{t-1} es un factor de normalización de tal manera que las fracciones se suman uno. $U_{j,t}$ es la "función de idoneidad" o "medida de rendimiento". $\beta \geq 0$ se denomina "intensidad de la elección", que mide la rapidez con que la masa de los operadores pasará a la estrategia óptima. Según Brock and Hommes (1997), este parámetro juega un papel crucial en el camino a un comportamiento dinámico complicado.

Un candidato natural para medir la adaptación evolutiva es el beneficio acumulado $R_t z_{j,t}$, dado por:

$$U_{j,t}^{(1)} = \frac{1}{a_j \sigma^2}\left(p_t + y_t - Rp_{t-1}\right)\left(p_{j,t}^e + \bar{y} - Rp_{t-1}\right) + \eta U_{j,t-1}, \tag{14}$$

donde $0 \leq \eta \leq 1$ es un parámetro de memoria que mide la rapidez con que la aptitud realizada pasada es descartada para la selección de la estrategia y $z_{j,t}$ está dada por (5).

Pero al ignorar el término de varianza en (4), esta medida de rendimiento no es compatible con el hecho de que los inversionistas son maximizadores de media-varianza con aversión al riesgo. Otro candidato natural para la función de aptitud sería entonces la utilidad derivada de los beneficios realizados, es decir, los beneficios realizados ajustados al riesgo. Las utilidades de los beneficios realizados en el período t del inversionista tipo j se da por:

$$\pi_{j,t} := \pi\left(R_{t+1}, E_{j,t}[R_{t+1}]\right) = R_{t+1} z\left(E_{j,t}[R_{t+1}]\right) - \frac{a_j}{2}\sigma^{2} z^{2}\left(E_{j,t}[R_{t+1}]\right),$$

donde

$$z\left(E_{j,t}[R_{t+1}]\right) = \arg\text{máx}\, \pi_{j,t} = \frac{E_{j,t}[R_{t+1}]}{a_j \sigma^2} = z_{j,t}.$$

Tengamos en cuenta que las probabilidades de elección discreta son independientes del nivel de utilidad, es decir, que no cambian si el mismo término π_t se resta de todos los exponentes en (12). Por lo tanto, podemos considerar:

$$\begin{aligned}
\pi_{j,t} - \pi_t &= \pi\left(R_{t+1}, E_{j,t}[R_{t+1}]\right) - \pi\left(R_{t+1}, R_{t+1}\right) \\
&= -\frac{1}{2a_j\sigma^2}\left(E_{j,t}[R_{t+1}] - R_{t+1}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2a_j\sigma^2}\left(p_{t+1} + p_{j,t+1}^e + \delta_{t+1}\right)^2,
\end{aligned}$$

donde $\pi\left(R_{t+1}, R_{t+1}\right)$ es la utilidad de los beneficios de los inversionistas perfectamente precavidos y d_t es el término de ruido del proceso de dividendos estocásticos, es decir:

$$y_t = \bar{y}_t + \delta_t.$$

Notemos que, en ausencia de perturbaciones aleatorias, o sea cuando $d_t \equiv 0$, estas diferencias se reducen a una constante negativa multiplicada por los cuadrados de los errores de predicción. Por lo tanto, se define la segunda medida de aptitud como

$$U_{j,t}^{(1)} = -\frac{1}{2a_j\sigma^2}\left(p_t + p_{j,t}^e + \delta_{t+1}\right)^2 + \eta U_{j,t-1}. \qquad (15)$$

En el segundo paso de la actualización de las fracciones, los operadores técnicos condicionan sus gráficas en base a la información acerca de los fundamentalistas, es decir, sobre las desviaciones de precios del valor fundamental p^*,

$$n_{2,t} = \tilde{n}_{2,t} e^{-(p_{t-1}-p^*)^2/\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad n_{1,t} = 1 - n_{2,t}. (16)$$

Mientras los precios se encuentran cerca del valor fundamental, las fracciones son determinadas casi en su totalidad por la aptitud evolutiva. Sin embargo, cuando las desviaciones de precios respecto al fundamental llegan a ser grandes el término de corrección $e^{-(p_{t-1}-p^*)^2/\alpha}$ se vuelve pequeño, lo que representa el hecho de que cada vez más operadores creen que una corrección hacia la solución fundamental está a punto de ocurrir.

CONCLUSIONES.

Se pueden modelar los mercados financieros como sistemas de creencias no lineales adaptativas. El modelo evolutivo condicional con ruido de precios de los activos con operadores fundamentalistas frente a los técnicos está dado por las ecuaciones (11), (12), (16) y una de las medidas de rendimiento evolutivas (14) o (15). Esto define un sistema dinámico 6-dimensional (o 4-dimensional si $\eta = 0$).

BIBLIOGRAFÍA.

Brock, W.A., and C.H. Hommes (1997). *A Rational Route to Randomness*. Econometrica, 65, pp. 1059–1095.