MODELADO DE LA DIFUSIÓN DE LA RIQUEZA EN UNA PORCIÓN TERRITORIAL RECTANGULAR

Fernando Ávila Carreón[1]
Joel Arturo Rodríguez Ceballos[2]
Rubén Vega Cano[3]

RESUMEN.

En Chukwu, (2003:653-666) se aplicó una ecuación diferencial para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podía considerarse en forma aproximadamente rectangular. En este artículo se hace un cálculo análogo para ciertas condiciones de frontera de mixtas, considerando ahora la ecuación no homogénea correspondiente.

Palabras clave: Modelado, difusión territorial de la riqueza, ecuación diferencial en derivadas parciales.

ABSTRACT.

In Chukwu, (2003:653-666) was applied a differential equation to model the diffusion of wealth in countries whose territory could be considered in an approximately rectangular form. In this article we make a similar calculation for certain mixed boundary conditions, now considering the corresponding inhomogeneous equation.

Key words: Modeling, territorial diffusion of wealth, partial differential equation.

Clasificación JEL: C, C02, C65.

[1] Profesor – Investigador en la Facultad de Contaduría y Ciencias Administrativas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. E – mail: favila_68@yahoo.com.mx
[2] Profesor – Investigador en el Instituto Tecnológico de Morelia.
[3] Profesor – Investigador en el Instituto Tecnológico de Morelia.

INTRODUCCIÓN: MODELADO DE LA DIFUSIÓN TERRITORIAL DE LA RIQUEZA.

El modelado matemático de variables económicas ha sido aplicado con relativo éxito en los últimos años (Markowich, 2007:185-206), en particular para la riqueza (Chukwu, 1998:723-799) y haciendo uso de ecuaciones diferenciales (Zhang, 2005:40). En Chukwu, (2003:653-666) se aplicó para dicha modelación la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha u;\ 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \tag{1}$$

sujeta a las condiciones:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t), \qquad 0 \le y \le b, t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t), \qquad 0 \le x \le a, t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b,$$

donde la variable $u(x, y, t)$ denota la riqueza del sistema económico como función de x, y (que son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte, respectivamente, del territorio rectangular $[0; a] \times [0; b] \subset \mathbf{R}^2$) y de t (el tiempo transcurrido). La riqueza u para tales efectos fue definida como la suma de inversión directa en la economía de la república + bienes de capital + el producto de población empleada por salarios + el cociente de la cuantificación de las habilidades empresariales dividido entre la población. La constante $\kappa > 0$ se define como el coeficiente colectivo de difusión para la riqueza u mientras que αu es la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior, en este caso directamente proporcional a la riqueza u en cada punto territorial y tiempo con constante de proporcionalidad $\alpha > 0$. Dicha ecuación se utilizó para modelar la difusión de la riqueza en países cuyo territorio podría considerarse en forma aproximada como un rectángulo. Como se ve, a lo largo de la frontera están impuestas solamente condiciones de Dirichlet.

En este artículo se hace un cálculo análogo considerando en lugar de la ecuación (1) la correspondiente ecuación no homogénea (2) con las condiciones de frontera de mixtas allí dadas.

DESARROLLO TÉCNICO DEL MODELO.

Sea $u(x,y,t):[0;a] \times [0;b] \times [0;\infty) \to \mathbf{R}$ la riqueza del sistema económico con la porción territorial rectangular, donde x, y son las coordenadas en las direcciones oeste-este y sur-norte respectivamente, mientras que t es el tiempo. La riqueza inicial (en el tiempo $t = 0$) en dicho sistema la denotaremos por $f(x,y)$. La riqueza en las fronteras norte y sur es nula (condición de Dirichlet homogénea) y en las fronteras este y oeste la razón de cambio de la riqueza en dirección perpendicular a las mismas es nula (condición de Neumann homogénea). Supongamos que la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es de la forma $\alpha u + F(x,y,t),\ \alpha > 0$.

Esto quiere decir que una parte la riqueza neta internamente generada junto con la afluencia de riqueza del exterior es directamente proporcional a la riqueza u en cada punto territorial y tiempo con constante de proporcionalidad $\alpha > 0$, y otra parte depende solamente de cada punto territorial y tiempo. De esta forma tenemos ahora un modelo con la ecuación no homogénea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha u + F(x,y,t); \qquad (2)$$

$$0 < x < a, \qquad 0 < y < b, \qquad t > 0$$

(la constante $\kappa > 0$ es el coeficiente colectivo de difusión para la riqueza u), sujeta a las condiciones de frontera e inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,y,t) = 0, \qquad 0 \le y \le b, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0,t) = 0, \qquad u(x,b,t) = 0, \qquad 0 \le x \le a, \qquad t > 0,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad 0 \le x \le a, \qquad 0 \le y \le b.$$

De acuerdo con el método de separación de variables (DuChateau and Zachmann, 2002:124), el cual podemos usar debido a las condiciones de frontera homogéneas, se busca la solución $u(x,y,t)$ en forma de la serie de Fourier de funciones propias $\{X_k\}$ del operador diferencial lineal L, definido por medio de la expresión:

$$LU = -\kappa \nabla^2 U - \alpha U, \qquad (3)$$

donde el laplaciano ∇^2 en dimensión 2 se define como:

$$\nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

El operador L está definido en algún subconjunto del espacio vectorial $L_2[(0;a) \times (0;b)]$ de las funciones $U(x,y)$, $(x,y) \in (0;a) \times (0;b)$ tales que la función $|U(x,y)|^2$ es integrable en $(0;a) \times (0;b)$. Más precisamente, el dominio de definición G_L del operador L está constituido por todas las funciones $U(x,y) \in L_2[(0;a) \times (0;b)]$ que satisfacen las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,y,t) = 0, \ \frac{\partial U}{\partial x}(a,y,t) = 0, \ 0 \leq y \leq b, \ t > 0, \tag{4}$$

$$U(x,0,t) = 0, \ U(x,b,t) = 0, \ 0 \leq x \leq a, \ t > 0, \tag{5}$$

y cuyas imágenes $LU \in L_2[(0;a) \times (0;b)]$. El problema de valores propios se plantea como sigue. Hay que encontrar los valores del parámetro L (valores propios del operador L) tales que la ecuación:

$$LU = \Lambda U \tag{6}$$

Tiene soluciones no triviales (no nulas) en el dominio G_L. Estas funciones son las funciones propias de L. La ecuación (6) equivale a:

$$\nabla^2 U + \frac{\Lambda + \alpha}{\kappa} U = 0$$

Sea $\lambda^2 = \frac{\Lambda+\alpha}{\kappa}$. Entonces la ecuación anterior resulta ser:

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0, \tag{7}$$

Para resolver la ecuación (7) utilizamos la separación de variables. Suponemos una solución no trivial separable en la forma:

$$U(x,y) = X(x)Y(y).$$

Las derivadas parciales correspondientes son:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = X(x)Y'(y),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = X(x)Y''(y).$$

Sustituyendo en (7) tenemos:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda^2 X(x)Y(y) = 0.$$

Dividiendo entre $X(x)Y(y)$ resulta:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = 0$$

y de allí tenemos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2.$$

Al depender cada lado de esta igualdad de variables distintas, ambos lados deben ser iguales a una constante; elegimos dicha constante como $-\mu^2$, $\mu \in \mathbf{R}$. Entonces las ecuaciones separadas para la ecuación (7) resultan ser:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \tag{8}$$

$$Y''(y) + (\lambda^2 - \mu^2)Y(y) = 0. \tag{9}$$

Las soluciones correspondientes a (8) pueden expresarse como:

$$X(x) = A\cos\mu x + B\,\mathrm{sen}\,\mu x.$$

En términos de las variables separadas las condiciones de frontera se convierten en:

$$X'(0)Y(y) = X'(a)Y(y) = 0, \qquad 0 \leq y \leq b, \qquad t > 0.$$

Entonces, para obtener una solución no trivial X de la ecuación (8) se debe tener:

$$X'(0) = 0, \qquad X'(a) = 0,$$

por lo que respectivamente tenemos que $B = 0$ y:

$$\mathrm{sen}\,\mu a = 0, \qquad A \neq 0.$$

De esto último se da:

$$\mu = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Notemos que $\mu = 0$ es también un valor propio. En consecuencia,

$$X_m(x) = A_m \cos\frac{m\pi x}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Del mismo modo, para la solución no trivial Y seleccionamos $\gamma^2 = \lambda^2 - \mu^2$ de modo que de la solución de la ecuación (9) es:

$$Y(y) = C\cos\gamma y + D\,\text{sen}\,\gamma y.$$

Con la aplicación de las condiciones homogéneas, encontramos $C = 0$ y

$$\text{sen}\,\gamma b = 0, \qquad D \neq 0.$$

Así, obtenemos:

$$\gamma = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Y:

$$Y_n(y) = D_n\,\text{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Recordando que $\lambda^2 = \mu^2 + \gamma^2$, las soluciones de la ecuación (7) pueden escribirse en la forma:

$$U_{mn}(x, y) = E_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\,\text{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(con $n = 0$ no hay función propia) para cada uno de los valores propios correspondientes:

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2,$$

los cuales para la ecuación (6) se expresan como:

$$\Lambda_{mn} = \kappa\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 - \alpha$$

Podemos renumerar los subíndices dobles mn por el subíndice simple k. De esta manera Λ_{mn} o Λ_k, U_{mn} o X_k y $E_k \equiv E_{mn}$. Así tenemos:

$$LX_k = \Lambda_k X_k, \quad X_k \in G_L, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Estas funciones propias de L pueden escogerse ortonormales con:

$$E_{0n} = \sqrt{\frac{2}{ab}},\ E_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\ m \geq 1, \qquad (10)$$

de modo que:

$$\langle X_k, X_l \rangle \equiv \int_0^a \int_0^b X_k(x,y) X_l(x,y)\, dydx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}\frac{n_k \pi y}{b} \operatorname{sen}\frac{n_l \pi y}{b}\, dydx = \delta_{kl}, \\ \dfrac{2}{ab}\sqrt{\dfrac{2}{ab}}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}\frac{n_k \pi y}{b} \cos\frac{m_l \pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n_l \pi y}{b}\, dydx = 0, \\ \dfrac{2}{ab}\sqrt{\dfrac{2}{ab}}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \cos\frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n_k \pi y}{b} \operatorname{sen}\frac{n_l \pi y}{b}\, dydx = 0, \\ \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b \cos\frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n_k \pi y}{b} \cos\frac{m_l \pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n_l \pi y}{b}\, dydx = \delta_{kl}, \\ m_k, m_l, n_k, n_l = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

$\{X_k\}$ es un conjunto completo de $L_2[(0;a) \times (0;b)]$ y cada función $u(x,y) \in G_L$ puede representarse en forma de la serie:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, X_k \rangle X_k(x,y).$$

Para $t > 0$ la solución de la ecuación de difusión de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial prescritas puede ser escrita como:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y)\, T_k(t), \qquad T_k(t) = \langle u, X_k \rangle \tag{11}$$

Con el fin de encontrar la ecuación diferencial para las funciones $T_k(t)$, la solución (11) se sustituye en la ecuación (2):

$$\sum_{l=1}^{\infty} X_l(x, y)\, \dot{T}_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot L X_l(x, y) + F(x, y, t)$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot \Lambda_l X_l(x, y) + F(x, y, t)$$

Después se toma el producto escalar de esta ecuación por la función propia X_k,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle X_k, X_l \rangle\, \dot{T}_l(t) = -\sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) \cdot \Lambda_l \langle X_k, X_l \rangle + \langle X_k, F \rangle$$

y, usando la ortonormalidad de funciones propias, se obtienen las ecuaciones:

$$\dot{T}_k(t) + \Lambda_k T_k(t) = f_k(t), \quad f_k(t) \equiv \langle X_k, F \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Debido a la condición inicial de la ecuación (2), de (11) tenemos:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y)\, T_k(0),$$

$$T_k(0) = \langle u|_{t=0}, X_k \rangle = \langle f, X_k \rangle. \tag{13}$$

Para la condición inicial $T_k(0)$ observamos que la solución del problema homogéneo correspondiente a (2) (es decir, con $F(x, y, t) \equiv 0$) tiene la forma:

$$u_{\mathrm{H}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y)\, T_{\mathrm{H},k}(t),$$

donde:

$$T_{H,k}(t) = A_{H,k}e^{-\Lambda_k t}, \qquad k = 1, 2, ...$$

es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a (12) (ya que $f_k(t) \equiv 0$ si $F = 0$) para cada Λ_k, siendo cada $A_{H,k}$ una constante arbitraria que determinamos aplicando la condición inicial homogénea:

$$u_H(x, y, 0) = \sum_{l=1}^{\infty} X_l(x, y)\, A_{H,l}, \tag{14}$$

que es la misma que para la ecuación no homogénea ($u_H(x, y, 0) = u(x, y, 0) = f(x, y)$), de donde obtenemos, al tomar el producto escalar de f dada por (14) por X_k y considerando (13),

$$T_k(0) = \langle X_k, f \rangle = A_{H,k}. \tag{15}$$

Es decir:

$$A_{H,k} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b}\, dydx, \qquad m = 0,$$

y, para $m_k, n_k \geq 1$,

$$A_{H,k} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m_k \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n_k \pi y}{b}\, dydx.$$

La solución del problema de Cauchy para la ecuación (12) con la condición inicial (15) es:

$$T_k(t) = A_{H,k}e^{-\Lambda_k t} + \int_0^t e^{-\Lambda_k (t-\tau)} f_k(t) d\tau$$

Sustituyendo esta expresión en la serie (11), se obtiene la solución formal del problema dado por la ecuación de la difusión de la riqueza (2) que cumple las condiciones de frontera e inicial allí dadas.

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x, y) \left[A_{H,k}e^{-\Lambda_k t} + \int_0^t e^{-\Lambda_k (t-\tau)} f_k(t) d\tau \right]$$

Así, la solución de la ecuación de difusión de la riqueza que cumple las condiciones de frontera prescritas puede ser escrita como:

$$u(x,y,t) = e^{\alpha t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, e^{-\kappa\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 t}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} +$$

$$e^{\alpha t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}\, e^{-\kappa\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 t}\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

$$\times\int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{\kappa\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 \tau} f_k(t)\,d\tau, \tag{16}$$

donde las funciones $f_k(t)$ están dados por (12) para los subíndices m, n que correspondan, los coeficientes E_{mn} están dados por (10), los coeficientes a_{mn} están dados por:

$$a_{0n} = \frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dydx$$

y, para $m \geq 1$, por:

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dydx. \tag{18}$$

RESULTADOS.

La expresión de la solución de la ecuación de difusión de la riqueza planteada (2) está dada por las ecuaciones (16)-(18). Notemos que si:

$$\alpha > \kappa\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2, \tag{19}$$

entonces es posible que $u(x,y,t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

CONCLUSIONES.

Como puede advertirse el crecimiento de la riqueza puede ser no acotado a largo plazo, y en este artículo hemos analizado la participación que en dicho crecimiento tienen el factor exponencial α y la función de entrada $F(x, y, t)$, los cuales juntamente abarcan la generación y transferencia de la riqueza en el territorio rectangular. Para el crecimiento es determinante la condición dada por la desigualdad (19) en relación a α y el último término de la ecuación (18).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Chukwu, Ethelbert N., "Goodness through optimal dynamics of the wealth of nations" *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 4, Nr. 5, December 2003:p.653-666.

Chukwu, Ethelbert N., "Volterra integrodifferential neutral dynamics for the growth of wealth of nations: a controllability theory" *Indian J. Pure Appl. Math.*, 29, no. 7, 1998:723-799.

DuChateau, Paul and Zachmann, David. *Applied Partial Differential Equations*, Dover, 2002.

Markowich, Peter A. *Applied partial differential equations: a visual approach*, Berlin Heidelberg Germany, Springer-Verlag, 2007.

Zhang, Wei-Bin. *Differential equations, bifurcations, and chaos in economics*, Singapore, World Scientific, 2