ANTECEDENTES FRACTALES PARA MERCADOS FINANCIEROS

Luis Guillermo Villaseñor Báez[1]
Jorge Víctor Alcaraz Vera[2]

RESUMEN.

El presente artículo trata de mostrar de manera muy breve los antecedentes y fundamentos matemáticos que existen sobre los mercados financieros en aquellos autores que buscan una mejor explicación que la hipótesis de mercados eficientes, una explicación puede ser la fractal, que claro está no es la única.

Palabras clave: Mercados financieros, hipótesis de mercados eficientes, fractales, movimiento Browniano fraccional.

ABSTRACT.

This article tries to show very briefly the background and mathematical foundations that exist about the financial markets in those authors who seek a better explanation than the efficient markets hypothesis, an explanation may be the fractal, which of course this is not the only one.

Key words: Financial markets, efficient market hypothesis, fractal, fractional Brownian motion.

Clasificación JEL: C65, G14, G15.

---

[1] Estudiante del Doctorado en Ciencias en Negocios Internacionales del Instituto de Investigaciones Económicas y Empresariales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Becario CONACYT. E – mail: guillevilla@msn.com

[2] Profesor – Investigador en el Instituto de Investigaciones Económicas y Empresariales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. E – mail: talcarazv@hotmail.com

ANTECEDENTES.

Para aquellos lectores que no están satisfechos con la explicación o con la teoría de que los mercados bursátiles siguen un comportamiento normal y eficiente, están otras teorías que dan una explicación más acorde con sus comportamientos y rendimientos, una de ellas es el movimiento browniano que Robert Brown bautizó en 1827 al observar partículas de polen de la especie *Clarckia pulchella* suspendidas en agua.

El movimiento browniano y el cálculo de It^o son las bases matemáticas sobre las que se han construido varios de los conceptos y resultados de las Finanzas y la Administración de Riesgos actuales. El modelo de Black-Scholes, la valuación de derivados, la estimación de curvas de tasas de interés y la medición de los diferentes tipos de riegos han sido desarrollados con la ayuda de estos procesos matemáticos y bajo ciertos supuestos sobre las características de las variables financieras y los mercados.

Sin embargo, con el paso de tiempo se ha encontrado y confirmado que algunos de los supuestos financieros y/o matemáticos no se ajustan a la realidad, por lo que se requiere cada vez de teorías más generales que expliquen estas diferencias y que incluyan como casos particulares a las ya existentes. Un ejemplo que se puede mencionar, es sobre el supuesto del comportamiento gaussiano de los rendimientos de instrumentos financieros. Una modelación con una distribución de tipo normal, debido a sus características, simplifica la valuación de derivados. Sin embargo, en un análisis de rendimientos de las series reales, algunas distribuciones de variables presentan sesgos, mayor curtosis en sus valores centrales o bien colas anchas, e incluso pueden tener distribuciones diferentes de la normal. Por lo tanto, cada vez se busca utilizar funciones más generales como pueden ser las de Lévy o bien la teoría de valores extremos para realizar mejores valuaciones. De la misma manera, en forma más general, se siguen proponiendo la utilización de distintos procesos estocásticos o teorías, como la de fractales, para buscar una mejor explicación al comportamiento de ciertos fenómenos financieros.

En la literatura sobre el tema de fractales además de los artículos seminales de Hurst (Hurst, H. 1951) con su estudio de hidrología y su metodología Rango Reescalado (R/S) para la determinación del coeficiente del mismo nombre y de los artículos clásicos de Mandelbrot (Mandelbrot, B. 1968 y 1982), considerado padre de la geometría fractal. Los libros de Peters (Peters, E. 1994 y 1996) son para el presente trabajo una referencia fundamental sobre las ideas, técnicas y conceptos de los mercados fractales.

Su obra resume el estado del arte actual de las teorías de fractales y caos y su relación con los mercados financieros. De forma sencilla aplica estos conceptos matemáticos al análisis de los mercados principalmente de Estados Unidos. También describe el artículo el trabajo de McCulloch (McCulloch, J. 1978 y 1985) sobre la estadística fractal y en particular la evaluación de opciones con funciones más generales como son las de Lévy (también es recomendable consultar al autor original). Por otra parte, se debe mencionar el trabajo de Palomas Molina (Palomas, E. 2002) dentro de los primeros antecedentes sobre la aplicación del método (R/S) para la determinación del coeficiente Hurst para el caso de variables financieras de México.

Sobre el tema del movimiento browniano fracciona (MBF) los primeros intentos de recuperar algunas propiedades básicas, como la de no arbitraje, cuando se trabaja con el movimiento browniano fraccional fueron hechos por de Dai and Hayde (Dai, W. And Hayde, C. 1996) y Lin (Lin, S. 1995) Debido a que los esfuerzos en esta dirección no pudieron eliminar la presencia de arbitraje, surgió la construcción de una nueva integral a partir del producto Wick y fueron analizadas entre otros por Desagupta (Desagupta, A. 1997 y 2000) y Shryaveev (Shryaveey, A. 1998). Una vez resuelta esta propiedad para procesos brownianos fraccionales con el nuevo formalismo, quienes han tal vez publicado la mayor cantidad de material sobre el movimiento browniano fraccional y su aplicación en las Finanzas son Oksendal (Oksendal, B. 2004) y Hu (Hu, Y, and Oksendal, B. 2000), además de Duncan y Pasik-Duncan (Duncan, T.E., Hu, Y. y Pasik-Duncan, B. 2002). Estos trabajos se inician desde la definición de la métrica de un espacio de Hilbert y van recuperando varias de las técnicas matemáticas que el modelo Black-Scholes tradicional utiliza, además mediante el uso del producto Wick, las derivadas Malliavin y las integrales Skorohod es posible generalizar entre otros, el teorema de Girsanov, las esperanzas condicionales y lema de It^o para su posterior aplicación en las finanzas. Los artículos de Necula (Necula, C. 2002) presentan una perspectiva diferente de los estudios de Oksendal y Hu y en forma práctica presentan una deducción de la ecuación Black-Scholes a partir de movimientos browniano fraccionales. En otro trabajo relacionado, Rosek (Rosek, S. 2006) también presenta una deducción alternativa del lema de It^o para el caso fraccional. Por último los trabajos de Giovanni Vasconcelos (Vasconcelos, G. 2004) presentan un resumen importante el paso de los modelos brownianos clásicos a los brownianos fraccionales y sus implicaciones en los supuestos y resultados.

FRACTALES.[3]

Antecedentes.

Desde la época de los griegos, la cultura occidental siempre ha vivido obsesionada en encontrar y estudiar las formas simétricas y contornos suaves, de tal manera que desde la antigüedad se desarrolló una geometría basada en este tipo de estructuras conocidas como puras. Platón afirmaba que el mundo, considerado como real, consistía de ese tipo de formas que eran creadas por una fuerza o una entidad llamada -el bien- que ocasionalmente podía ser visualizada a través de la mente. También suponía que el mundo en que vivimos es una copia imperfecta del mundo real y fue creada por una entidad (ordenador supremo) diferente llamada Demiurgo. Esta copia inferior resultaba ser áspera, asimétrica y sujeta a decadencia. Aunque la geometría griega fue formalizada posteriormente por Euclides, Platón reconoció la incapacidad de la misma para describir el mundo, para su forma de pensar, el problema no era la geometría sino nuestro propio mundo.

La geometría fractal es la geometría de Demiurgo. A diferencia de la geometría Euclidiana, está puede utilizar formas ásperas y asimétricas. Los objetos no son variaciones de unas cuantas formas perfectas, sino más bien son de complejidad infinita y entre más cercanas y más cuidadosas sean las revisiones más detalles son revelados.

Si se considera el ejemplo clásico de un pino de navidad, los dibujos realizados por niños, o bien, los logos comerciales de un árbol navideño consisten de un triángulo simétrico que simula las hojas y ramas con una base rectangular angosta que sirve de base de tronco. En la vida real un árbol, y en particular un pino, es una red de ramas, sobre ramas que sucesivamente son cada vez más pequeñas y los troncos no son muy simétricos, ni de contornos suaves, además de considerar que cada pino es diferente. La geometría euclidiana no puede replicar un pino real, solo se puede crear una aproximación, un pino navideño es un claro ejemplo de que una forma fractal, está compuesto por una estructura global pero localmente es aleatorio. En general, se sabe como es un pino con cierta precisión pero también se sabe que individualmente cada rama es diferente.

Puede pensarse en la geometría euclidiana como una simplificación del mundo de Demiurgo. En contraste, la geometría fractal está caracterizada por la autosimilaridad y un incremento en complejidad bajo

[3] Basado principalmente en Peters.

una magnificación. Una de sus intenciones como geometría del espacio y que también se extiende al concepto del tiempo es generar visiones más realistas con el apoyo de las computadoras.

Fractales.

En la actualidad no existe una definición precisa de lo que es un fractal, ni siquiera, Benoit Mandelbrot, el padre de la geometría fractal ha desarrollado una definición precisa y formal, aunque no es demasiado difícil de reconocer cuando se encuentra alguno.

En términos prácticos los fractales tienen ciertas propiedades que son ideales para propósitos de modelación y ciertas características que los hacen medibles. Entre la variedad de definiciones sobre los fractales podemos mencionar son las siguientes:

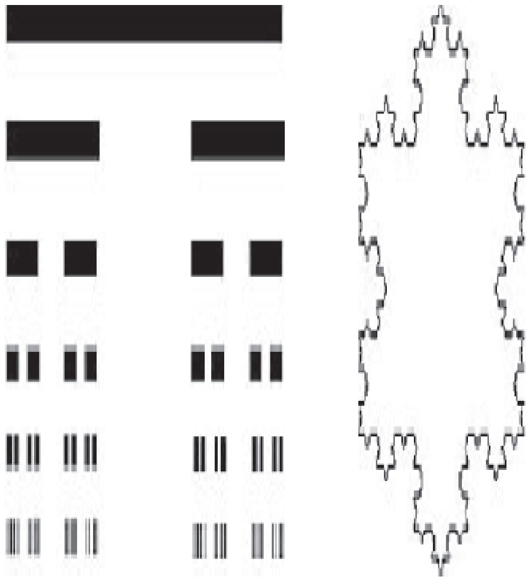
a) Son objetos matemáticos que conforman la geometría del Caos.
b) Proviene del latín que significa roto debido a que se asocia con las discontinuidades de las funciones.
c) Son objetos matemáticos cuya dimensión es fraccionaria.
d) Son objetos matemáticos que posee esencialmente dos características: autosimilaridad y dimensión fractal.

La primera y más importante propiedad de los fractales es la autosimilaridad, que significa que todas sus partes están relacionadas de alguna forma con el todo, es decir que cada una de las partes del objeto tienen las características del objeto completo o bien que los detalles o partes más pequeñas tienen una relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de manera infinita. Esta propiedad hace a los fractales invariantes en la escala.

Existen dos tipos muy bien definidos de fractales: los lineales y los no lineales. Los primeros se construyen con un cambio en la variación de escala, es decir los fractales lineales son idénticos hasta aumentar la escala en infinito. Ejemplos de ellos son el conjunto de Cantor, el conjunto von Koch (o copo de nieve) (Gráfica a) y el triángulo de Sierpinski.

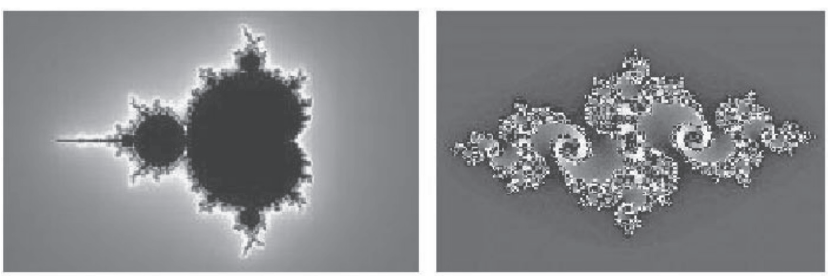
Por otro lado, los fractales no lineales se generan a partir de distorsiones complejas o no lineales. Ejemplo de ello es el conjunto de Mandelbrot y el conjunto de Julia. (Gráfica b)

Gráfica a. Fractales lineales.



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica b. Fractales no lineales.



Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, recordando que la dimensión topológica del conjunto vacío (-1), de un punto (0), de una línea recta (1), de un plano (2) y de una figura en el espacio (3). La dimensión está ligada con los grados de libertad, cuando la dimensión cero solo existe un punto inmóvil, cuando la dimensión 1 tenemos una recta y un grado de libertad, un plano tendría dos grados de libertad y el espacio tiene tres grados de libertad.

La más antigua e importante forma de medir la dimensión fractal es la dimensión Hausdorff, que tiene la ventaja de poder determinar la dimensión de cualquier conjunto, aunque no siempre resulta fácil su implementación computacional.

La dimensión Hausdorff ($\dim_H F$) es el punto crítico donde la medida Hausdorff (H^S) de un conjunto F brinca de ∞ a 0. Las medidas de Hausdorff generalizan las ideas de longitud, área y volumen. Se puede verificar que para conjuntos de R^n la medida n – dimensional Hausdorff es salvo una constante de multiplicación el volumen n - dimensional usual.

Buscando una definición más formal de un objeto fractal, podemos decir que es aquel en el que su dimensión fractal de Hausdorff-Besicovtch supera a su dimensión topológica y en general no es un número entero. Por otro lado una definición de dimensión más general y sencilla puede ser la siguiente:

$$S = L^D \qquad (2.1)$$

En donde S es la cantidad de segmentos, L es la escala seleccionada de medición y D es la dimensión. También se puede despejar la dimensión que quedaría como:

$$D = \frac{\log S}{\log L} \qquad (2.2)$$

Fundamentalmente la mayoría de las definiciones de dimensión tienen la idea de medida a cierta escala. Para cada una de ellas se mide un conjunto, de tal forma, ignore las irregularidades de tamaño menor a la escala y observar como se comporta esa medida cuando la escala se acerca a cero.

Una relación muy importante es la que tiene la dimensión fractal con el exponente Hurst (H) y está dada de la siguiente forma:

$$D = 2 - H \qquad (2.3)$$

ANÁLISIS CUALITATIVO DE LOS MERCADOS.

Teoría Tradicional de Mercado de Capitales.

En el mundo de las finanzas, un grupo de analistas se inclinan a pensar que los mercados financieros deberían tener un comportamiento cercano al determinista, mientras que por otra parte hay un grupo que piensa que el comportamiento de ellos es completamente aleatorio. Se abre una tercera posibilidad con los mercados fractales, al considerar que ambas posiciones pueden ser correctas.

Un tipo de análisis conocido como Rango Reescalado (R/S) es un método utilizado para distinguir series fractales de otro tipo de series de tiempo revelando así su estructura de autosimilaridad.

Es común modelar los procesos financieros con variables independientes de tipo estocástico con una hipótesis de comportamiento de movimiento browniano, en donde cada resultado es independiente del anterior.

El movimiento browniano tiene características deseables de tipo matemático y estadísticamente supone un comportamiento normal de sus funciones de distribución. El desarrollo de la teoría tradicional de mercados de capitales se ha basado durante largo tiempo en las ideas y conceptos de juegos justos, martingalas y movimientos brownianos.

La hipótesis de mercados eficientes (HME) pretende explicar la estructura estadística de los mercados. La teoría presupone que los mercados son -eficientes-, es decir, que los precios actuales reflejan toda la información que pudiera influir en los eventos futuros, además de que los inversionistas reaccionan de forma inmediata a la llegada de nueva información. También la teoría supone que los rendimientos del mercado de cualquier activo se distribuyen normalmente y que todos ellos tienen los mismos horizontes de inversión. Sin embargo, existe evidencia empírica de que los rendimientos en los mercados en general no se comportan de acuerdo a esta distribución.

La Hipótesis de Mercado Fractal (HMF) proporciona una estructura económica y matemática al análisis de los mercados fractales. A través de la hipótesis de mercados fractales es posible entender la existencia de la estructura estadística de autosimilaridad y también la forma de como el riesgo es distribuido entre los inversionistas.

Revisión de Mercados.

La HME pretende explicar el comportamiento de los mercados. Bachelier (1900) fue el primero en proponer que los mercados y sus productos pueden ser modelados a través de una caminata aleatoria y mediante el cálculo de probabilidad estándar utilizando una base empírica a su trabajo de investigación.

El supuesto más importante de la HME es que las observaciones necesariamente tienen que ser independientes, o a lo más de memoria corta. Esto solamente podría ocurrir si los precios se movieran de acuerdo a una caminata aleatoria, un movimiento browniano, o si la mejor estimación del precio futuro es el precio presente, es decir se comporta de acuerdo a una martingala o un juego justo. El modelo de caminata aleatoria afirma que los cambios en los precios no pueden ser inferidos de cambios de precios pasados, además de que el modelo no considera la información exógena fundamental o económica. Los precios actuales reflejan toda la información disponible y todos los inversionistas tienen igual acceso a ella, por lo tanto los inversionistas en forma agregada no pueden ganarle sistemáticamente al mercado debido a la eficiencia del mismo.

Para justificar la HME con una metodología científica tradicional a partir de información empírica y evidencia estadística el razonamiento hubiera sido el siguiente:

a) Observar un comportamiento o estructura en un sistema o proceso.
b) Desarrollar una teoría o modelo para ajustar los hechos conocidos.
c) Revisar y modificar la teoría vigente para explicar nuevos hechos conocidos.

En el caso de HME la teoría fue desarrollada para justificar el uso de una herramienta estadística que requiere de independencia estadística o memoria de corto plazo. De acuerdo con HME los cambios en los precios deberían estar bien representados por una distribución normal. Pero en la realidad se encuentran distribuciones de colas pesadas que frecuentemente son evidencia de un sistema de memoria larga generada por un sistema estocástico no lineal. Si bien la HME se desarrolla en un ambiente matemático más fácil, es necesario, trabajar una hipótesis de mercado que ajuste los hechos observados y tome en cuenta porque los mercados no se comportan de esa forma.

Otra variable de gran importancia que debería de ser considerada es la liquidez (que es diferente del término de volumen comerciado). Las mayores crisis financieras, de acuerdo con Peters (1992) han ocurrido cuando ha existido una baja liquidez con un alto volumen comerciado. Con esta idea se podría pensar en la liquidez como: volumen comerciado no balanceado.

En el sistema de oferta y demanda de capitales se requiere de liquidez del mercado para asegurar:

a) El precio obtenido por el inversionista sea lo más cercano a lo que el mercado considera justo.
b) Inversionistas con diferentes horizontes de inversión puedan comerciar eficientemente con otro.
c) No haya pánico o estampidas cuando la oferta y la demanda no estén balanceadas.

En los mercados reales, los inversionistas requieren de un mercado líquido y la HME prácticamente no hace referencia al concepto de liquidez, se considera que los precios siempre son justos, independientemente de la liquidez o pensando que siempre habría la posibilidad de tener liquidez.

Por otra parte existe una diferencia entre un mercado estable y un mercado eficiente. Un mercado estable es un mercado líquido y si un mercado es líquido entonces puede considerarse que los precios están cercanos a su valor justo. Cuando hay ausencia de liquidez, los inversionistas participantes estarían deseosos de tomar cualquier precio sea justo o no.

Si toda la información tiene el mismo impacto sobre todos los inversionistas, no debería haber falta de liquidez. Sin embargo, los inversionistas no son homogéneos, algunos deben comerciar para generar utilidades todos los días, otros deben comerciar para utilizar pasivos que están altamente apalancados. Todos los inversionistas que comercian en el mercado simultáneamente tienen diferentes horizontes de tiempo. Entonces la fuente de liquidez es generada debido a que los inversionistas poseen diferentes horizontes de inversión, diferente conjunto de información y consecuentemente diferente concepto de precio justo.

En forma de resumen, de los hechos empíricos observados de los mercados, una nueva hipótesis tendría al menos que tratar de explicar porqué las distribuciones de colas pesadas existen cuando hay diferentes horizontes de inversión y porqué en la estructura de plazos de las volatilidad la desviación estándar de los rendimientos se incrementa más rápido que la raíz cuadrada del tiempo.

Cuando los mercados son considerados estables, HME trabaja relativamente bien. Sin embargo, durante momentos de pánico o estampidas, los modelos dejan de funcionar ya que HME son modelos de equilibrio.

HIPÓTESIS DE MERCADOS FRACTALES.

La Hipótesis de Mercados Fractales (HMF) enfatiza la importancia de la liquidez y de los diferentes horizontes de inversión en el comportamiento de los inversionistas. Para que la hipótesis sea tan general como sea posible no se le exigiría ningún requerimiento de tipo estadístico sobre los procesos.

La información por sí misma no tiene un impacto uniforme sobre los precios, esta sería asimilada en forma diferente por los diferentes horizontes de inversión.

En resumen la HMF propone los siguientes puntos 3:

a) El mercado es estable cuando está constituido de un gran número de horizontes de inversiones, lo cual asegura la liquidez del mercado.
b) El conjunto de información está más relacionado a la sensibilidad del mercado y a factores técnicos del corto que del largo plazo. Conforme el horizonte de inversión se incrementa, la información de los fundamentales de largo plazo domina. Entonces los cambios en los precios pueden reflejar información importante sólo para ese horizonte de inversión.
c) Si un evento ocurre que hace cuestionable la validez de la información fundamental, los inversionistas de largo plazo dejarían de participar en el mercado o comenzarían a comerciar basados en el conjunto de información de corto plazo. Cuando todos los horizontes de inversión del mercado se reducen a un mismo nivel, el mercado se vuelve inestable.
d) Los precios reflejan una combinación de comercio técnico de corto plazo y valuación fundamental de largo plazo. Los cambios en los precios de corto plazo son probablemente más volátiles o ruidosos que los de largo. Las tendencias corto plazo son probablemente resultados del comportamiento colectivo. No hay razón para creer que la longitud de las tendencias de corto plazo está relacionada con las tendencias económicas de largo plazo.
e) Si un título no tiene un vínculo al ciclo económico, entonces no habría tendencia de largo plazo. Por tanto, comercio, liquidez e información dominaran en el corto plazo.

Estadística Fractal contra Browniano Fraccional.

Si bien el modelo Black-Scholes tiene una estructura poderosa y elegante y considera a los mercados como Gaussianos[4] , completos, eficientes y libres de arbitraje. Algunos de los principales aspectos que alejan las variables de los mercados reales con respecto a las del mercado Black-Scholes son los siguientes:

i) En general los rendimientos de los activos no se distribuyen como una normal teórica sino que con frecuencia las distribuciones de variables reales presentan colas pesadas y curtosis.
ii) Las series financieras de los subyacentes presentan efectos de memoria larga y por lo tanto los eventos tampoco son completamente independientes.

Del mismo modo la autosimilaridad puede tener diferentes orígenes, si proviene de una alta variabilidad en donde los incrementos son independientes y de colas pesadas su descripción puede realizarse con procesos de Lévy. En cambio si las series tienen la propiedad de una alta dependencia, entonces su modelación debería de ser con movimientos brownianos fraccionales.

En el primer caso es posible plantear una solución a través de la construcción de funciones de Lévy con características estables y con la ayuda de sus funciones características es posible modelar distribuciones más generales. En el artículo de McCulloch (McCulloch, J. 1978 y 1985) se muestran algunas características de la función de Lévy y el resultado de la estimación del valor de una opción call.

El segundo caso corresponde a series donde sus eventos muestran cierta persistencia, este tipo de problemas pueden planearse a través de una generalización del movimiento browniano conocida como movimiento browniano fraccional con la utilización del coeficiente Hurst. El desarrollo de las siguientes secciones estaría enfocado al planteamiento y solución de este problema.

[4] Las distribuciones normales presentan dos ventajas: pueden considerarse directamente en la teoría de límite central y la suma de normales se distribuye como normal.

Gráfica c. Movimiento Browniano Fraccional y modelos matemáticos relacionados.

Fuente: Elaboración propia.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONAL.

Movimiento Browniano Tradicional y Movimiento Browniano Fraccional.

El objetivo de la presente apartado es proporcionar la justificación y la base técnica matemática para la utilización del Movimiento Browniano Fraccional y la extensión de algunos de los conceptos y teoremas conocidos del movimiento browniano tradicional.

Movimiento Browniano y Cálculo de It^o.

Un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ en un espacio de probabilidad fijo, con una filtración está definido por las siguientes propiedades:

i) $W(0) = 0$.

ii) *Si* $0 < t_1 < t_2 < <t_n$, entonces $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.

iii) *Si* $s < t \Rightarrow$ entonces $W(t) - W(s)$ se distribuye como $N(0, t - s)$.

En este caso el movimiento browniano coincide con el proceso de Wiener. Pero en general el movimiento browniano es independiente del concepto de filtración y para el proceso Wiener no se requiere independencia en los incrementos. Adicionalmente el movimiento browniano tiene dos propiedades importantes: la autosimilaridad y relación que posee con el ruido Blanco. Recordemos que la autosimilaridad está definida por la siguiente propiedad:

$$W(at) = a^{1/2} W(t), \forall t \qquad (1.1)$$

Esta igualdad es en el sentido de distribución de probabilidad, es decir que $W(at)$ y $a^{1/2}\ W(t)$ tienen exactamente las mismas distribuciones, en otras palabras, cualquier parte finita de una trayectoria de movimiento browniano cuando es reescalada apropiadamente es indistinguible de la trayectoria del todo. En el lenguaje fractal decimos que la trayectoria del movimiento es una curva fractal de dimensión $D = 2$. Con respecto a la segunda propiedad, la derivada de un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ es llamada un proceso de ruido blanco

$$\varphi = \frac{dW}{dt} \qquad (1.2)$$

Además el ruido blanco satisface las siguientes condiciones:

$$E[\varphi(t)] = 0 \qquad (1.3)$$

$$E[\varphi(t)\varphi(t')] = \delta(t - t'). \qquad (1.4)$$

Por otro lado, se define la integral sobre un proceso Wiener de la manera siguiente:

$$I(t) = \int_0^\infty g(t')dW(t') \qquad (1.5)$$

Esta integral es del tipo Riemann- Stieltj es, y si se toma una partición $[ti]_i^n = 0$ del intervalo $[t, 0]$, consideramos las siguientes sumas:

$$I_n = \sum_{i=0}^n g(t_i - 1)\Delta W(t_i) = \sum_{i=1}^n g(t_i - 1)\left[W(t_i) - W(t_i - 1)\right] \qquad (1.6)$$

Donde g (t) debe ser independiente del siguiente incremento ¢W (t) del movimiento browniano y bajo condiciones apropiadas sobre g (t) es posible mostrar que las sumas I convergen en el sentido media cuadrada. Utilizando la independencia de g (t) que el valor esperado de los incrementos brownianos es cero, se sigue:

$$E\,[I\,(t)] = E\,[\int_0^t g\,(t')\,dW\,(t')] = 0; \qquad (1.7)$$

También la integral estocástica obedece la propiedad de isometría:

$$E[I(t)^2] = E\left[\left(\int_0^t g\,(t')dW\,(t')\right)^2\right] = \int_0^t E\,(g^2(t'))dt' \qquad (1.8)$$

Un proceso de gran utilidad para el modelado de activos subyacentes dentro de las finanzas es el conocido como geométrico browniano que es una transformación exponencial del movimiento browniano estándar:

$$\mathbf{dS} = \mu\mathbf{Sdt} + \sigma\mathbf{SdW} \qquad (1.9)$$

Donde μ y σ son constantes y con la condición inicial S (t)=S. Este proceso se utiliza principalmente para rendimientos de activos.

Movimiento Browniano Fraccional.

El Movimiento Browniano Fraccional (MBF) fue originalmente definido por Kolmogorov en un espacio de Hilbert. Inicialmente fue llamado proceso Wienerhelix y posteriormente Mandelbrot le dió el nombre de Movimiento Browniano Fraccional.

Un MBF (B_h) con parámetro Hurst (H), ó $0 \leq H \leq 1$ es un proceso Gaussiano que se define por las siguientes propiedades:

i) $B_H(0) = 0$

ii) $E[B_H(t)] = 0 \forall t \in R$

iii)

$$C_H\,(t,s) = [E\;B_H(s)B_H(t)] = H\,(2H-1)\int_0^t\int_0^t |t-s|^{2H-2}\,dsdt = \frac{1}{2}[|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}];\ \forall\, s\ y\ t\ \in R$$

En particular cuando s = t y V =1/ 2 entonces $\mathbf{Var_H(t) = C_H\,(t, \quad t) = t}$

El coeficiente Hurst (H) determina el signo de la covarianza entre los eventos pasados y futuros, y dependiendo de su valor se tiene una cierta interpretación:

$\mathbf{Si\ H\ = \frac{1}{2}\ y\ C_H\,(t, s) = 0}$ entonces B_H (t) coincide con el movimiento browniano.

Si $H > \frac{1}{2}$ $y\ C_H\,(t, s) > 0$ entonces $B_H(t)$ es persistente en el sentido en que tiene una dependencia a largo plazo.

Si $H < \frac{1}{2}$ $y\ C_H\,(t, s) < 0$ entonces B_H (t) es antipersistente.

De la misma forma que el Movimiento Browniano, el MBF tiene la propiedad de auto similiridad, que es la propiedad más importante de los sistemas fractales. El MBF también es auto similar si para cualquier $\mathbf{H \in (0, 1) y\ \alpha > 0}$ (de la misma forma que la ecuación 1.1 del caso browniano tradicional):

$$\mathbf{B_H\,(\alpha t) = \alpha^H\, B_H(t), \forall t} \qquad (1.10)$$

Otra manera de interpretar la persistencia de H tiene que ver con la convergencia del siguiente estadístico ρn que puede tener los siguientes casos con ρn definido como:

$$\rho n \coloneqq E[B_H\,(1).\,(B_H(n+1) - B_H(n))]$$

a) $\mathbf{Si\ \rho n > 0\ \forall n\ = 1, 2, , , , y}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \rho n = \infty$ entonces H> $\frac{1}{2}$ y B_H (t) es persistente o de largo plazo

b) $\mathbf{Si\ \rho n < 0\ \forall} n\ \mathbf{= 1, 2, , , ,} y$ $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho n| < \infty$ entonces H< $\frac{1}{2}$ y B_H (t) es anti persistente

En los casos $\mathbf{H \neq, \frac{1}{2}}$, el MBF no puede ser considerado como un proceso Markoviano, ni como martingala y por tanto no puede ser analizado mediante el cálculo estocástico tradicional. En el artículo de Hu (Hu, Y. And Oksendal, B. 2000) hace referencia a los trabajos de Dasgupta (Dasgupta, A. 1997 y Dasgupta, A. And Kallianpur, G. 2000) y Shiryaev (Shiryaev, A. 1998) en donde entre otras cosas sostienen que la integral de trayectoria definida como una suma de Riemann:

$$\int_0^t \emptyset(t,w)dB_H(t) \lim_{\delta tk \to 0} \square \sum_{k=0}^{n-1} \emptyset\,(t_k).\left(B(t_{k+1}) - B(t_k)\right) \quad (1.11)$$

Si Si $0 = t_1 < t_2 < t_3 < t_n = T$ es una partición de [0; T] y $\delta t_k = t_k + 1 - t_k$, además si el limite existe, en general tiene un valor esperado diferente de cero

$$E\left[\int_0^t \emptyset(t,w)dB_H(t)\right] \neq 0$$

En consecuencia, con la integral de trayectoria los procesos no son libres de arbitraje, recordemos que a las posibilidades de hacer utilidades libres de riesgo sin dinero inicial es llamado oportunidad de arbitraje o simplemente arbitraje. En un mercado libre de arbitraje cualquier portafolio sin riesgo debe tener rendimientos iguales a la tasa libre de riesgo.

En un nuevo intento por sustituir el problema de arbitraje de las integrales de trayectorias, ahora se considera la integral conocida como Skorohod (Wick-Ito) desarrollada por Duncan, Huand Pasik-Duncan y que se denota por:

$$\int_0^t \square \emptyset\,(t,w)\delta_H(t) \quad (1.12)$$

Y que también puede definirse en términos de suma de Riemann como sigue:

$$\int_0^t \emptyset(t,w)dB_H(t) \lim_{\delta tk \to 0} \square \sum_{k=0}^{n-1} \emptyset\,(t_k) * \left(B(t_{k+1}) - B(t_k)\right) \quad (1.13)$$

Donde * denota el producto Wick, entonces si se llega a un valor esperado de cero:

$$E\left[\int_0^t \square \emptyset\,(t,w)\delta B_H(t)\right] = 0 \quad (1.14)$$

Por lo tanto, para poder trabajar con esta integral es necesario desarrollar un cálculo equivalente para poder que considere coeficientes Hurst diferentes de 0. 5. Además de demostrar si los procesos son martingalas también es interesante conocer las reglas de operaciones del producto Wick que hacen la diferencia en estas nuevas integrales con las integrales de trayectoria ordinarias.

Revisión del Espacio de Hilbert y Métrica.

Supongamos un coeficiente Hurst (H) constante, talque $\frac{1}{2} \leq H \leq 1$ y definimos una función $\emptyset$ de la siguiente manera:

$$\emptyset H(t,s) = H(2H-1)|t-s|^{2H-2} con\ t,s \in R \qquad (1.15)$$

Sea f: R⟶R es medible, entonces decimos que $f \in L_{\downarrow}\emptyset^{\uparrow}2\ (R)$ (Conjunto de las funciones cuadrado integrables) si:

$$|f|_{\emptyset}^{2} := \int R \int R\ f(s) f(t) \emptyset (t,s) dsdt < \infty \qquad (1.16)$$

Definiendo el producto interior:

$$(f.g)_{\emptyset} := \int R \int R\ f(s) f(t) \emptyset H(t,s)(t,s) dsdt \quad f,g \in L_{\emptyset}^{2}(R) \qquad (1.17)$$

Tenemos que $(L_{\emptyset}^{2}(R), (.,.))\emptyset$ es un espacio de Hilbert. Por otra parte si $f \in L_{\emptyset}^{2}$ se define:

$$\int R f(t) dB_H(t) \coloneqq \lim_{m\to\infty} \int R\, fm(t) dB_H(t) \qquad (1.18)$$

En:

$$f_m(t) = \sum_i a_i^m\ 1_{[t_i t_i+1]}(t) \qquad (1.19a)$$

Donde:

$$\int R\, f\,(t) dB_H(t) = \sum_i a_i^m (B_H(t_i + 1) - B_H(t_i)) \qquad (1.19b)$$

Principales Lemas y Teoremas.

A continuación se enuncian los lemas y teoremas más sobresalientes que son necesarios para tener una aplicación en las siguientes secciones. Para los interesados en las demostraciones de los Lemas 1, 2 y 3 consultar Hu and Oksendal (2000):

Lema1 (Isometría de Ito).

Si $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_\emptyset^2\,(\mathbf{R})$ entonces:

$$E\left(\int R\, f(t) dB_H(t)\right)^2 = |f|_\emptyset^2 \qquad (1.20)$$

Y por otra parte si $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_\emptyset^2\,(\mathbf{R})$ entonces se define:

$$\in (f) \coloneqq exp\left(\int R\ f dB_H - \frac{1}{2}|f|_\emptyset^2\right) \qquad (1.21)$$

Lema 2.

El span lineal de $\left(\in (f), f \in \mathbf{L}_\emptyset^2\,(\mathbf{R})\right)$ es denso el $L^2(\mu)$ donde (μ) es la ley de la probabilidad de B_H.

Consideremos para el lema siguiente los polinomios de Hermite, recordando que están definidos por:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right). \qquad (1.22)$$

Se sigue que si $B_H(t)$ es un movimiento browniano fraccional y tenemos que si $f \in \mathbf{L}_\emptyset^2\,(\mathbf{R})$ entonces:

$$\langle w, f \rangle = \int R\, f(t) dB_H(t, w) \tag{1.23}$$

Sea $\mathbf{I} = (\mathrm{N}_0^{\mathrm{N}})$ el conjunto finito de todos los multíndices $\alpha = (\alpha_1, , , , \alpha_m)$ de enteros no negativos, (N es el conjunto de números $N_0 = NU\{0\}$, entonces si $\alpha = (\alpha_1, , , , \alpha_m) \in I$ tenemos lo siguiente:

$$H_\alpha(w) \coloneqq \boldsymbol{h}_{\alpha 1}(\langle we_1 \rangle)\boldsymbol{h}_{\alpha 2}(\langle we_2 \rangle)\boldsymbol{h}_{\alpha n}(\langle we_n \rangle) \tag{1.24}$$

En particular si $\mathbf{e}^1 := (1, 0, 0, 0)$ denota el i-ésimo vector unitario $H_{e(1)}(w) \coloneqq \boldsymbol{h}_1\ (\langle w, e_1 \rangle) = (\langle w, e_1 \rangle) = \int R^{e1}\, t dB_H\ (t)$.

Lema 3 (Teorema de Expansión de Caos Fracción al Wiener-Ito).

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe una constante $c_\alpha \in R\ y\ \alpha\ \in I$ tal que:

$$X(w) = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha\,(w)\ en\ L^2(\mu) \tag{1.25}$$

Además:

$$\|X\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{\alpha \in I} \alpha!\, c_\alpha^2 \tag{1.26}$$

donde $\alpha! := \alpha_1!\, \alpha_2, , , , !\, \alpha_n$

Definimos $(S)_H^*$ como el conjunto de todas las expansiones formales:

$$G(w) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha H_\alpha(w) \tag{1.27}$$

tales que:

$$\|G\|^2_{H,-q} = \sum_{\alpha \in I} \alpha!\, c_\alpha^2 (2N)^{-\alpha q} < \infty\ para\ que\ alguna\ q \in N \tag{1.28}$$

Producto Wick.

Sean

$$F(w) = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha H_\alpha (w) \in (s)_H^* \text{ y } G(w) = \sum_{\alpha\in I} b_\alpha H_\alpha(w) \in (s)_H^*$$

Definimos el producto Wick de F y G por:

$$(f^\circ g)(w) = \sum_{\alpha,\beta\in I} a_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta}(w) \qquad (1.29)$$

Además si $F, G \in (s)_H^* \Rightarrow F^\circ G \in (s)_H^*$

Por otra parte si entonces $f \text{ y } g \in L_\emptyset^2(R)$ entonces:

$$\left(\int R\, f dB_H\right)^\circ \left(\int R\, g dB_H\right) = \left(\int R\, f dB_H\right)\left(\int R\, g dB_H\right) - (f,g)_\emptyset \qquad (1.30)$$

Si $X \in (s)_H^*$ entonces se define su potencia Wick $X^{\circ n}$ por:

$$X^{\circ n} = X^\circ X^\circ X^\circ,, X^\circ(en\ factores) \qquad (1.31)$$

Y la exponencial Wick se define de la siguiente forma:

$$exp^\circ(X) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{\circ n} \qquad (1.32)$$

Qué de forma más general se puede tener:

$$\epsilon(f) = exp^\circ((w,f)) = exp\left((w,f) - \frac{1}{2}|f|_\emptyset^2\right) \forall f \in L_\emptyset^2(R) \qquad (1.33)$$

Si $f, g \in L_\emptyset^2(R)$ tenemos que:

$$\epsilon(f)^\circ \in (g) = \epsilon(f+g) = \epsilon(f)\epsilon(g)_{\theta}{}^{-((f,g))} \qquad (1.34)$$

El ruido blanco fraccional $w_H(t)$ en el tiempo (t) se define como:

$$w_H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int R\ e_i(v)\emptyset(t,v)dv\right] \int R\ e_i(t) dB_H(t) \qquad (1.35)$$

$w_H(t) \in (s)^*_H \; \forall \, t$ además si $t \to B_H(t)$ es diferenciable en $(S)^*_H$ se puede llegar a:

$$\frac{d}{dt} B_H(t) = W_H(t) \; en \; (S)^*_H \qquad (1.36)$$

Qué justifica el nombre de ruido blanco fraccional

Si $\mathbf{Y} : \mathbf{R} \to (\mathbf{S})^*_{\mathbf{H}}$ es una función tal que $\mathbf{Y(t)^\circ W_H(t)}$ es integrable en $(S)^*_H$ entonces definimos la integral de tipo Ito fraccional por:

$$\int \mathbf{R\,Y\,(t)\,dB_H\,(t)} := \int \mathbf{R\;Y\,(t)^\circ\;W_H(t)dt} \qquad (1.37)$$

MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO FRACCIONAL.

Consideremos la extensión del movimiento geométrico browniano al caso fraccional con la siguiente ecuación diferencial estocástica fraccional:

$$dX(t) = \mu X\,(t)dt + \sigma X(t) dB_H(t), X\,(\mathbf{0}) = x > \mathbf{0} \qquad (1.38)$$

Donde $x, \mu \;\; y \sigma$ son constantes. Reescribiremos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu X\,(t) + \sigma X(t)^\circ dW_H(t) = (\mu + \sigma W\,(t))^\circ\, X(t) \quad (1.39)$$

Utilizando el cálculo Wick vemos que la solución de la ecuación está dada por:

$$X(t) = x \; exp^{\circ\left(\mu t + \sigma \int_0^t [W_H\,(s) d_s)\right]} = \; xexp^{\circ\left(\mu t + \sigma B_H(t)\right)} \qquad (1.40)$$

Y al final tenemos que:

$$X(t) = xexp\left(\sigma B_H(t) + \mu t - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sigma^{\mathbf{2}} t^{\mathbf{2}H}\right) \qquad (1.41)$$

Sea $\mathbf{L}_{\emptyset}^{1\,2}(\mathbf{R})$ que denota el complemento del conjunto de todos los procesos adaptados $F_t^{(H)}, f(t) = f(t, w)$ de tal forma que:

$$|f|^2_{\mathbf{L}_{\emptyset}^{1\,2}(\mathbf{R})} := E_{\mu\emptyset}\left[\int R \int R\ f(t)\, f(s)\emptyset(s,t)\,ds\,dt\right] + E_{\mu\emptyset}\left[\left(\int R\, D_S^{\emptyset} f(s)\,ds\right)^2\right] < \infty$$

(1.42)

Donde $D_S^{\emptyset}$ es la derivada de $\emptyset$ si $D_s F$ es la derivada Malleavin (definida en una sección más adelante) $D_S^{\emptyset} F = \int R\ \emptyset(s,t) D_t F\ dt$. Se tiene la siguiente isometría:

$$E\left[\left(\int R\ f(t,w)\,dB_H(t)\right)^2\right] = |f|^2_{\mathbf{L}_{\emptyset}^{1\,2}} \qquad (1.43)$$

$$E\left[\left(\int R\ f(t,w)\,dB_H(t)\right)\right] = 0\ \forall t\ \in\ \mathbf{L}_{\emptyset}^{1\,2}\ (\mathbf{R}) \qquad (1.44)$$

Fórmula Fraccional de Ito.

Supongamos que X (t) sigue el siguiente proceso browniano fraccional

$$dX(t) = \mu(t,w)dt + \sigma(t,w)dB_H(t)\ \mu, \sigma \in \mathbf{L}_{\emptyset}^{1\,2}$$

(1.45)

Si $f \in C^2(RxR)$ entonces tenemos:

$$f(t, X(t)) = (O, X(O)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\mu(S)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\sigma(s)dB_H(s) + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\sigma(s)D_s^{\emptyset}X(s)ds$$

Derivadas Fraccionales.

A partir del conocimiento del espacio $\Omega = S'(R)$ se puede definir la diferenciación con respecto a w.

Sea $F : S'(R) \to R$ es una función dada y sea $\gamma \in S'(R)$, decimos que F tiene una derivada direccional en la dirección γ si:

$$D_\gamma F = lim_{\epsilon\to 0}\ \frac{F(w + \epsilon\gamma) - F(w)}{\epsilon} \qquad (1.46)$$

Existe en $(S)_H^*$, en este caso decimos que $D_\gamma F$ es la derivada direccional de F en la dirección γ .

Decimos que $F : S^*(R) \to R$ es diferenciable si existe un mapeo $\psi R: (S)_H^*$ tal que:

$$\psi(\mathbf{t})\gamma(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}, \mathbf{w})\gamma \qquad (1.47)$$

es integrable y:

$$D_\gamma F(w) = \int R\,\psi\,(t, w)\,\gamma\,(t) dt \,\forall\, \gamma \in L^2(R) \qquad (1.48)$$

En este caso:

$$D_t F(w) \coloneqq \frac{dF(t, w)}{dw} := \psi(t, w) \qquad (1.49)$$

Ya $D_t F(w)$ se le llama gradiente estocástico o derivada Hida/Malliavian de F en t. La t propuesta y resultados de esta derivada pueden consultarse en Hu and Oksendal (2002) y Duncan, Hu and Pasik-Duncan (2002)

Teorema de Girsanov.

Si se considera un movimiento browniano con tendencia:

$$\widetilde{W}(t) = \lambda\, t + W(t) \qquad (1.50)$$

Con $0 \leq t \leq T\ y\ lamda$, una constante diferente de cero.

$\widetilde{W}(t)$ no es martingala y su valor esperado es diferente de cero. Sin embargo, puede existir otra medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ con respecto a la cual el proceso W (t) si puede llegar a ser un proceso browniano estándar. Este resultado se cono ce como Teorema de Girsanov.

El proceso $\widetilde{W}(t)$ dado por la ecuación anterior es un movimiento browniano estándar respecto a la medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ definida por:

$$\frac{\widetilde{d\mu}}{d\mu} = M_t \qquad (1.51)$$

Donde M_t es el proceso:

$$M_t = \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2(t)\right) = exp\left(-\lambda W_t + \frac{1}{2}\lambda^2(t)\right) \quad (1.52)$$

Para la versión del Teorema de Girsanov con el Movimiento Browniano Fraccional, consideremos $T > 0\ y\ \gamma$ una función continua con $supp\ \gamma \subset [0,T]\ y\ K$ una función con $supp\ \gamma \subset [0,T]\ y\ K$ tal que:

$$(K,\gamma)_{\phi} = (\gamma, f)_{L^2} \forall f\ supp\ f \subset [0,T] \quad (1.53)$$

Definiendo la medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ sobre la $\sigma -$ algebra $F_H^T = B(B_H(s), s \leq T)$ por:

$$\frac{\widetilde{d\mu}}{d\mu} = exp^{\diamond}(-(w,K)) \quad (1.54)$$

Entonces $\tilde{B}(t) = B_H(t) + \int_0^t \gamma_s\, ds$ es un movimiento browniano fraccional bajo $\tilde{\mu}$, este teorema puede revisarse en Oksendal (2004) para mayor detalle.

Teorema de Expansión de Caos Wiener-Ito en términos de Integrales Iteradas.

Denotemos $\mathbf{L}_{\phi}^2\ (\mathbf{R}^n)$ el espacio de funciones que son simétricas con respecto a sus n variables y $\|f\|_{L^2(R^n)>\infty}^2$

Definimos la integral iterada como:

$$I_n(f) = \int R^n f dB_H^{\otimes n} : n! \int s_1 \dots s_n f(s_1 \dots . s_n) dB_H(s_1), \dots ., B_H(s_n) \quad (1.55)$$

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe un $f_n \in \mathbf{L}_{\phi}^2\ (\mathbf{R}^n)$ tal que:

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mu);\ f_n \in \mathbf{L}_{\phi}^2\ (\mathbf{R}^n) \quad (1.56)$$

$$\|X\|^2_{G_k} := \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \|f_n\|^2_{L^2(R^n)} \qquad (1.57)$$

Decimos que la expansión formal está dada por:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \int R^n g_n dB_H^{\otimes n}(t);\, g_n \in \mathbf{L}^2_{\phi}\ (\mathbf{R}^n) \qquad (1.58)$$

Pertenece al espacio $G_{-q} = G_{-q}[(\mu]_{\phi})$ si:

$$\|G\|^2_{G_{-q}} := \sum_{n=0}^{\infty} n!\, \|g_n\|^2_{L^2[(R]^n)} e^{-2qn} < \infty \qquad (1.59)$$

Donde se define $G^* = G(\mu_{\phi}) \sqcup_{q \in N} G_{-q}\ (\mu_{\phi})$

EXPECTATIVAS CUASICONDICIONALES.

Definiciones.

Sea $G = \sum_{n=0}^{\infty} \int R^n g_n dB_H^{\otimes n};$ definimos las expectativas condicionales (o también llamadas cuasi-condicionales) de G con respecto a F_t^H por:

$$\widetilde{E_t}\ [G] := \widetilde{E_t}\ [G|F_t^H] = \sum_{n=0}^{\infty} \int R * g_n(s)\, 1_{0<s<t}(s) dB_H^{\otimes n}(s) \qquad (1.60)$$

A partir de lo anterior se generan los siguientes resultados que obtuvo Necula en su trabajo del (2002):

a) Sea $F \in G *$ tenemos que $\widetilde{E_t}\ [F] \in G *$
b) Sea $F, G \in G *$ tenemos que $\widetilde{E_t}\ [F^{\circ}G] = \widetilde{E_t}\ [F]^{\circ}\widetilde{E_t}\ [G]$
c) Sea $F \in L^2(\mu), \widetilde{E_t}\ [F] = F$; si y solo si F es F_t^H medible (1.61)

Un proceso X_t es adaptado a una filtración $F(t)_{t>0}$ si X_t es F_t medible $\forall t > 0$, X_t genera un flujo de información que está contenida en la trayectoria de X (t) en el tiempo t.

Un proceso estocástico M_t es llamado Martingala respecto a la filtración F_t con $t < 0$, si:

i) M_t es adaptado a la filtración $F_{tt\geq 0}$
ii) $E[|M_t|] < \infty \forall t \geq 0$
iii) $E[|M_t|F_{t0}] = M_{t0} \; \forall t \geq t_0$ (1.62)

El movimiento browniano es una martingala, otra forma de referirse usualmente a las martingalas es como juego justo. Diremos que un proceso estocástico adaptado $F_t^H M(tw)$ es cuasi martingala si $M(t) \epsilon G^*, \widetilde{E_s}[M(t)] = M(s), \forall t > s$ y se siguen los resultados para los brownianos fraccionales, también del trabajo de Necula (2002):

a) $B_H(t)$ es cuasi martingala.

b) Sea $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_\phi^2 \; (\mathbf{R})$ **y** $\epsilon \mathbf{t} := \mathbf{exp}\left(\int_0^t f(s)\, dB_H(s) - \frac{1}{2}\left|f\mathbf{1}_{[t,0]}\right|_\phi^2\right)$) decimos que $\epsilon(\mathbf{t})$ es cuasi Martingala.

c) Sea $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_\phi^1, \mathbf{2} \; (\mathbf{R})$ **y** $\mathbf{M(t)} := \int_0^t f(s, w)\, dB_H(s)$ tenemos que M (t) es cuasi martingala. (1.63)

Teorema Fraccional Clark-Ocone.

a) Sea $F \in G^* \; y \; F \; es \; F_t^H$ medible. Entonces y $\widetilde{E_t}[D_t F] \in G^*$ y y

$$F(w) = E[F] + \int_0^T \widetilde{E_t}[D_t F] \circ W_H(t) \qquad (1.63a)$$

b) Sea $F \epsilon L^2(\mu) \; y \; F \; es \; F_t^H$ medible. Entonces $\widetilde{E_t}[D_t F] \in \mathbf{L}_\phi^1, \mathbf{2}$ **y**

$$\mathbf{F(w)} = \mathbf{E[F]} + \int_0^T \widetilde{E_t}[D_t F] \circ dB_H(t) \qquad (1.63b)$$

El teorema anterior, es un resultado del trabajo de Necula (2002).

CONCLUSIÓN.

Los apartados anteriores tratan de manera muy breve cómo se ha venido manejando la hipótesis de que en los mercados financieros no impera una hipótesis normal, ni eficiente, y relata los fundamentos mínimos para el fundamento matemático de los caminos aleatorios, no normales, ni eficientes, los estudiosos y un servidor manifiestan la intención de no querer modelar, que sería algo muy pretencioso, lo expuesto aquí es en un principio solamente una explicación para una mejor comprensión y que sirva de antecedente en siguientes fases de modelación.

BIBLIOGRAFÍA.

Black, F. and M. Scholes (1973) The pricing of Options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

Cont. R (1994), Long dependence in financial markets, Centre de Mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique France / Finances Publiques, 49(2), pp. 282-286.

Dai W. and C. Hayde (1996) It^o Formula with respect to fraccional Brownian motion and its application, *J. Appl. Math. Stoch*, Anal 9, pp. 439-448.

Dasgupta A. (1997) Fractional Brownian Motion: Its properties and applications to stochastic integration. Ph. D. Thesis, Dept. of Statistic, University of Carolina at Chapel Hill.

Desagupta, A. and G. Kallianpur (2000) Arbitrage opportunities for class of Gladyshev process, *Appl. Math. Optim*, 41, 377-385.

Duncan, T. E., Y., Hu and B., Pasik-Duncan (2002) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion, *SIAM J. Control Optim.*, 38, pp. 582-612.

Fleming, Ostdiek y Whaley, " Predicting Stock Market Volatility: a new measure", The Journal of Futures Markets Vol (15) 3, 265-302, 1965

Hu, Y. and B. Oksendal (2000) Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance, Preprint University of Oslo.

Hull, J 2003, Options Futures and Other Derivatives, Fifth Edition, Prentice Hall.

Hull, J. and A. White(1987)The Pricing of Options on Assets on Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*, 42(2), pp.281-300.

Hurst, H. (1951) The long-term storage capacity of reservoirs *Transactions of American Society Civil Engineer*, pp. 116 - 195.

Indicadores del Mercado en el Boletín de Opciones

Kravych, Y. (2002)Stock Price Modelling by Long-Memory Process, Overview of the Fractional Brownian Motion Approach, University of New Wales Sydney Australia.

Lin, S. (1995) Stochastic analysis of fractional Brownian motion and applications *SIAM review 10*, pp. 422 - 437.

Mandelbrot, B. (1982) The Fractal Geometry of Nature, NY W.H. Freeman

Mandelbrot, B. and V. Ness (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM review 10*, 11(3).

McCulloch J. (1985) The value of European Options with Log-Stable Uncertainty, Working paper.

McCulloch J. (1978) The pricing of Short Lived Options when Price Uncertainty is Log-symmetric stable, Working paper.

Necula C. (2002) Modelling and detecting Long Memory in Stock returns, Academy of Economic Studies, Dissertation Paper.

Necula C. (2002) Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment, Academy of Economic Studies, Bucharest Romania.

Norros, I., E. Valkeila. , and J. Virtamo (1999) An Elementary approach to a Girsanov Formula and Other Analytical Results on Fractional Brownian Motions, it Bernoulli 5 (4).

Oksendal B. (2004) Fractional Brownian Motion in Finance Preprint University of Oslo.

Palomas E. (2002) Evidencia e Implicaciones del fenómeno Hurst en el mercado de capitales, *Gaceta de economía*, Año 8, Núm. 15.

Peters, E. (1991), Chaos and Order in Capital Markets, New York: John Wiley and Sons.

Peters, E., Fractal Market Analysis (Applying Chaos Theory to Investment an Economic) New York: John Wiley and Sons.

Rosek S. and R. (2006) Schobel Risk Preference Based Option Pricing in Fraccional Brownian Market, Preprint Faculty of Economics and Business Administration, University of Tbingen, Germany.

Shiryaev A. (1998) On arbitrage and replication for fractal model, Shiryaev and Sulem editors, Workshop on mathematical finance, INRIA, Paris.

Sánchez, C. (2001), Valor en Riesgo y otras aproximaciones, Valuación, Análisis y Riesgo.

Vasconcelos G. (2004) A guide walks down wall street: an introduction to econophysics, Universidad Federal Pernambuc Brasil.
Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
Venegas, F. (2006) Riesgos Financieros y Económicos, Thompson.
Wilmott, P. (2005) Quantitative Finance, Wiley.